Rombaldi

156

Exponentielle de matrices. Applications.

Dans toute cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

I/ L'exponentielle d'une matrice.

1) L'exponentielle comme une somme de série.

Théorème 1 : Soit $\sum a_k z^k$ une serie entière à coefficient dans $\mathbb{K}$ de rayon de convergence $R>0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

- Si $\rho(A) < R$, la serie de terme général $(a_k A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est normalement convergente
- Si $\rho(A) > R$, la serie de terme général $(a_k A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente.

On note alors pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A) < R$, $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$

Théorème 2 : Avec les notations du théorème précédent, la matrice $f(A)$ est un polynôme en A.

Remarque 3 : $\sum \frac{1}{k!} z^k$ à un rayon de convergence infini.

Définition 4 : L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est bien définie et est appelée exponentielle de A.

On la notera $\exp(A)$ ou encore e^A.

Remarque 5 : Lorsque $n=1$, on retrouve la fonction exponentielle que l'on connait bien.

Exemple 6 :

- $*$ $\exp(0_n) = I_n$
- $*$ $\exp(I_n) = e I_n$
- $*$ $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
- $*$ $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Remarque 7 : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

2) Propriété et Calcul.

Proposition 8 : Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On a $\exp(PMP^{-1}) = P\exp(M)P^{-1}$.

En particulier, si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors $\exp(M)$ et $\exp(N)$ le sont aussi.

Proposition 9 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors

- $*$ $\operatorname{Det}(e^A) = e^{\operatorname{Tr}(A)}$
- $*$ $\exp(M)^t = \exp(M^t)$
- $*$ $\overline{\exp(M)} = \exp(\overline{M})$

Proposition 10 : Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si M et N commutent Alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$

Théorème 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

D1

Proposition 12 : Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice k. Alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{k-1} \frac{N^k}{k!}$

Exemple 13 : $\exp\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix}$

Proposition 14 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & (0) & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lemme 15 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A. Soit $F = \beta \Pi_1^{\alpha_1} \cdots \Pi_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteur irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ de F. Pour tout i, on note $N_i = \mathrm{Ker}(\Pi_i^{\alpha_i}(A))$. On a alors $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynome en A.

Théorème 16 : (DUNFORD) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$.
Il existe un unique couple (D, N) de matrice tq :
i) D est diagonalisable, N est nilpotente.
ii) $A = D + N$ et $DN = ND$.

Application 17 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(A)$ est diagonalisable

Exemple 18 : La décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1&1&4\\0&-2&7\\0&0&3 \end{pmatrix}$ est elle-même.

II/ Propriété en tant que fonction

1) Autour de la fonction exponentielle.

Théorème 19 : La fonction exponentielle est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 20 : Pour $n \geq 2$, la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas injective.

Exemple 21 : $\exp(0) = \begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 22 : La fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Exemple 23 : La matrice $B = \begin{pmatrix} -1&1\\0&-1 \end{pmatrix}$ ne peut s'écrire de la forme $B = \exp(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 24 : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective et $\forall M \in GL_n(\mathbb{C}), \exists Q \in \mathbb{C}[X], A = \exp(Q(A))$

Application 25 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corollaire 26 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in GL_n(\mathbb{C})$, polynomiale en A telle que $X^p = A$.

D2 I

2) Restrictions Remarquables :

Définition 27 : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $M^t = M$. On note alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

$S_n^{++} = \{A \in \mathcal{S}_n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle Ax, x \rangle > 0\}$.

Théorème 28 : L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Définition 29 : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $M^* := \overline{M}^t = M$. On note alors $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes et $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives

$\mathcal{H}_n^{++} = \{A \in \mathcal{H}_n \,/\, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \ \langle Ax, x \rangle > 0\}$.

Théorème 30 : L'application $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Remarque 31 :
- On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes à coefficients complexes.
- On note $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unipotentes à coefficients complexes.

Théorème 32 : L'application $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ est une bijection.

Raméo

III / Application aux équations différentielles

Proposition 33 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tM) \end{array}$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dérivée $t \mapsto A\exp(tA)$.

Proposition 34 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = MX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par $X : t \mapsto \exp((t-t_0)M)X_0$

Exemple 35 : $\begin{cases} x' = 4x + 3y \\ y' = x + y \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : t \mapsto \exp(tM)$.

Proposition 36 : Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue. Alors, l'unique solution de $\begin{cases} X' = MX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est

$$X : \begin{array}{l} I \to GL_n(\mathbb{R}) \\ t \mapsto e^{(t-t_0)M} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)M} B(s)\,ds. \end{array}$$