159

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 1$. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

I/ Généralités sur les sous-espaces stables.

1) Sous-espaces stables

Def 1: Un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par l'endomorphisme u si l'inclusion $u(F) \subseteq F$ est vérifiée.

i.e : $\forall x \in F,\ u(x) \in F$

Exemple 2: Le noyau et l'image de u sont des sous-espaces stable par u.

Prop 3: Si F et G sont deux sous-espaces stables par u. Alors $F+G$ et $F \cap G$ le sont aussi.

[2] **Def 4**: L'endomorphisme induit par l'endomorphisme u sur un sous-espace vectoriel stable $F \subset E$ est l'endomorphisme

$$u_{|F} : F \longrightarrow F,\quad x \longmapsto u(x)$$

Prop 5: Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par u. Soit $B_F = (e_1, \dots, e_k)$ une base de F que l'on complète en une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors la matrice de u dans la base B est $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A = \mathrm{Mat}_{B_F}(u)$.

Prop 6: Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E de dimension n_i. Soit B une base adaptée à E.

Alors F_i stable par $u \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$

Exemple 7: * Soit p un projecteur. On a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ qui sont stables par p. [2]

* Soit s une symétrie. On a $E = \mathrm{Ker}(s+id) \oplus \mathrm{Ker}(s-id)$ qui sont stables par s.

Exemple 8: u stabilise toutes les droites $\Leftrightarrow$ u est une homothétie.

Prop 9: Soient χ_u et Π_u le polynome caractéristique et le polynome minimal de u. Si F est un sous-espace stable par u. Alors $\chi_{u_{|F}} | \chi_u$ et $\Pi_{u_{|F}} | \Pi_u$

Prop 10: Si $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u. Alors $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \chi_{u_{|G}}$ et $\Pi_u = \mathrm{ppcm}(\Pi_{u_{|F}}, \Pi_{u_{|G}})$ [1]

2) Recherche de sous-espaces stables

Prop 11: Si u et v commutent alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Corollaire 12: $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

Application 13: Les sous-espaces caractéristiques, les sous-espaces propres et $\mathrm{Ker}(u^k)$ sont stables par u.

Lemme 14: Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si n est pair, alors il existe un sous-espace stable de dimension 2. Si n est impair, alors il existe un sous-espace stable de dimension 1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ il existe toujours un vecteur propre. [2]

3) Dualité.

Def 15: Soit $F \subset E$, on définit l'orthogonal de F dans E^* par : $F^\perp = \{ \varphi \in E^* \mid \forall x \in F, \varphi(x) = 0 \}$

Prop 16 : $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* et $F^\perp = \mathrm{Vect}(F)^\perp$.

Prop 17 : $\mathrm{Dim}(F) + \mathrm{Dim}(F^\perp) = \mathrm{Dim}(E)$

[1] **Def 18 :** On définit la transposée de u par ${}^t u : E^* \to \mathcal{L}(E)$, $\phi \mapsto \phi \circ u$

Prop 19 : F est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par ${}^t u$

II / Application à la Réduction

1) Diagonalisation :

[1] **Def 20 :** u est diagonalisable si il existe une base B de E telle que la matrice représentative de u dans B soit diagonale

Théorème 21 : u est diagonalisable $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

[2] **Théorème 22 :** Si u est diagonalisable et F stable par u. Alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

Corollaire 23 : Les sous-espaces stables par u diagonalisable sont ceux admettant une base de vecteurs propres.

Théorème 24 : Si u et v commutent et sont tous les deux diagonalisables. Alors il existe une base B de E telle que les matrices de u et v dans B soient diagonales.

Application 25 : La somme de deux endomorphismes commutant diagonalisables est diagonalisable.

2) Réduction de Jordan

[3] **Lemme 26 :** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ avec $P_1, \dots, P_k$ deux à deux premiers entre eux.
Alors $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et les projections relatives à cette décomposition sont des polynômes en u.

Théorème 27 : Si χ_u est scindé. Alors, $\exists ! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d + n$ avec d diagonale, n nilpotent et d et n commutant où d et n sont des polynômes en u.

Def 28 : On appelle bloc de Jordan associé à $\lambda \in \mathbb{K}$, de taille k, la matrice $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$.

Théorème 29 : Si χ_u est scindé, alors il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$ avec unicité de la décomposition à permutation des blocs près. [1]

3) Endomorphismes cycliques.

Def 30 : Soit $x \in E$. Le sous-espace cyclique $E_x = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est le plus petit sous-espace stable par u contenant x.

Prop 31 : $E_x = \mathrm{Vect}(u^i(x), i \in \mathbb{N})$

Prop 32 : Soit $x \in E$. $I_x = \{P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 33 : Soit $x \in E$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\pi_u = \prod_{j \in J} P_j^{n_j}$ avec $n_j \in \mathbb{N}$ et P_j irréductible sur $\mathbb{K}$.
Déterminer combien $E = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ possède de sous-espace stable par u.

Def 34 : Le polynome minimal de l'endomorphisme induit u sur le sous-espace E_x est défini par $\pi_{u,x} = \pi_{u_{|E_x}}$

Def 35 : On dit que u est cyclique si $\exists x \in E$, $E_x = E$

[1] **Def 36 :** Soit $P = X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_0$. On appelle matrice compagnon de P, la matrice $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$

Théorème 37 : u cyclique $\Leftrightarrow \deg(\pi_u) = \dim(E)$
$\Leftrightarrow \pi_u = \chi_u$
$\Leftrightarrow$ il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon

[1] **Théorème 38** : Il existe $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, $u_{|F_i}$ cyclique et $\pi_{u,x_r} | \dots | \pi_{u,x_1}$.
De plus, il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est :
$$\begin{pmatrix} C(\pi_{u,x_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(\pi_{u,x_r}) \end{pmatrix}$$

III / Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes normaux.

Def 39 : u est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$ où u^* est l'adjoint de u.

Exemple 40 : Les endomorphismes autoadjoints sont normaux.

Prop 41 : F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par u^*

Prop 42 : F stable par u, normal $\Leftrightarrow F^\perp$ stable par u.

[3] **Théorème 43** : Si u est normal, alors il existe une base orthonormée B de E telle que $Mat_B(u) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p, A_1, \dots, A_k)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $A_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Application 44 : Si $u \in O_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une base B de E telle que $Mat_B(u) = diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, R_1, \dots, R_k)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et R_j des matrices de rotations.

2) Endomorphismes semi-simples

Def 45 : u est dit semi-simple si tout sous-espace stable par u admet un supplementaire stable.

[4] **Théorème 46** : u semi-simple $\Leftrightarrow \pi_u$ est produit de polynomes irreductibles distincts.

Exemple 47 : Un endomorphisme nilpotent est semi-simple $\Leftrightarrow$ il est nul.

Application 48 : On peut remplacer d diagonalisable par d semi-simple dans le Théorème de Dunford pour une version plus générale.

3) Representations :

Def 49 : Une representation d'un groupe G est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$ où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel fini.

Def 50 : Une sous-representation de (V, ρ) est un sous-espace de V stable par ρ. Si (V, ρ) n'admet pas de sous-representation non trivial, on dit qu'elle est irréductible.

Théorème 51 : Soit (V, ρ) une représentation de G et F une sous-representation de E. Alors, il existe une sous-representation F' telle que $E = F \oplus F'$

Corollaire 52 : Toute representation peut s'écrire comme somme de representations irreductibles.

[1] Objectif agregation
[2] Algèbre et géométrie [Burg]
[3] Algèbre [Gourdon]
[4] Algèbre linéaire Capes et Agrégation [Cognet].