

Determinant. Exemples et applications

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I / Généralités

1) Formes multilinéaires

Définition 1: Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des K -ev. Une application $f: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ est dite p -linéaire si en

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$$

on peut voir les p applications partielles sont linéaires. On note $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$ l'ensemble de ces applications et si $E_1 = \dots = E_p = E$ et $F = K$, on parle de forme p -linéaire sur E , noté $\mathcal{L}_p(E, K)$.

Exemple 2: L'application $E \times E \rightarrow K$ est une forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$.

Proposition 3: $\dim(\mathcal{L}_p(E, K)) = (\dim(E))^p$.

Définition 4: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$

* f est dite alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que 2 vecteurs sont égaux.
* f est dite antisymétrique si l'échange de 2 vecteurs de $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f la valeur opposée.

Proposition 5: $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$ est antisymétrique si et seulement si

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_p, \text{ et } \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$

Théorème 6: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$. f est antisymétrique si et seulement si f est alternée.

Remarque 7: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$ alternée. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille liée alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Définition 8: Pour toute forme p -linéaire $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$, on note

$$f^\# : E^p \rightarrow K$$

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

et ainsi construite, $f^\#$ est une forme p -linéaire alternée.

2) Determinant d'une famille de vecteurs

Théorème 9: L'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E est un K -ev de dimension 1. De plus, il existe une unique forme n -linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée de E .

Définition 10: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle déterminant dans B , noté $\det_B$, l'unique forme n -linéaire alternée prenant la valeur 1 sur B : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on a $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} e_j$. On a alors $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)}$.

Proposition 11: Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Il y a équivalence entre:

- i) $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée.
- ii) Pour toute base B de E , $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.
- iii) Il existe une base B de E , $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.

3) Determinant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée.

Définition 12: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E . So $\det_B(f)$ (noté $\det(f)$) ne dépend pas de la base B choisie. On l'appelle déterminant de f , noté $\det(f)$.

Proposition 13: i) $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
ii) $\det(\text{id}_E) = 1$ iii) $f \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

Définition 15: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A , noté $\det(A)$, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$. Soient noté $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Proposition 16: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors:

- i) $\det(A) = \det(A^T)$
- ii) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ iii) Si $A = \mathcal{M}_{A,B}(f)$, alors $\det(f) = \det(A)$
- iv) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ v) Les matrices semblables ont le même $\det$.

II / Calcul pratique du déterminant.

1) cas particuliers

Proposition 17: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Proposition 18: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors $\det(A)$ est le produit des éléments diagonaux.

Proposition 19: Si $\eta = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors $\det(\eta) = \det(A)\det(B)$

Proposition 20: On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes

Proposition 21: L'adjointe du produit de Gauss s'applique pour transposer la matrice et calculer son déterminant.

Exemple 22: $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Application 23: Pour $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ le déterminant d'une matrice de Vandermonde

et avec $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

2) Inverse et cofacteurs

Définition 24: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A^{-1} = (a_{i,j}^{-1}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ on appelle inverse de A . Le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A . Soit noté $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ s'appelle le cofacteur de $a_{i,j}$.

Proposition 25: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A_{i,j}$ les cofacteurs des éléments de A . Alors:

- i) $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$ ii) $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$

Définition 26: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des cofacteurs des éléments de A , est appelé comatrice de A et on note $\text{com}(A)$.

Proposition 27: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $A^t \text{com}(A) = \det(A) I_n$.

Exemple 28: Si $A \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

III / Applications:

1) En calcul différentiel

Lemme 29: Soit $m \in \mathbb{N}^*$, l'application $\det: \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $V(\eta, H) \in (\mathcal{M}_m(\mathbb{R}))^2$, $d(\det)(\eta) = \text{tr}(\text{com}(\eta)H)$

Application 30: $\det(\eta)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Lemme 31: (Changement de variable) Soit $f: U \rightarrow V$ un $\mathbb{R}^n$ -difféomorphisme avec U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Alors $\int_U f(x) dx = \int_V f(y) dy \det(J(f))$ du.

Application 32: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et $\text{un } \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$\in \mathbb{R}, \pi, \pi, \pi$

Application 32: $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est un e^2 -difféomorphisme de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}^2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ donc pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} dr d\theta.$$

Exemple 33: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) En algèbre linéaire:

Définition 34: Un système de Cramer est un système de la forme $Ax = b$ d'inconnues $x \in K^n$, où $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $b \in K^n$.

Proposition 35: Un système de Cramer admet une unique solution si et seulement si $A \in \mathcal{GL}_n(K)$.

La solution $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est donnée par $x_i = \frac{\det(A_{i,1}, \dots, \hat{A}_{i,i}, \dots, A_{i,n})}{\det(A)}$.

Exemple 36:
$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$$
 a pour solution $(5, 1, 1)$.

Définition 37: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ on appelle polynôme caractéristique de A , le polynôme $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$

Proposition 38: Des valeurs propres de A sont les racines de χ_A .

Exemple 39: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A(x) = (x-2)(x-3)$ donc A est diagonalisable.

3) En géométrie.

Proposition 40: Soit $(v_1, \dots, v_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$. On note $\text{Vol}(v_1, \dots, v_m)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_m$ i.e. l'absolue

$\exists z \in \mathbb{R}^n \mid z = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$. On a alors $\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) = |\det(v_1, \dots, v_m)|$

Théorème 41: Soit V un $\mathbb{R}$ -ev fini de dimension $m \geq 2$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. Il existe une base de V unitaire dont la base dual est unitaire pour la norme induite par V^* .

Proposition 42: Des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_n(K) = (c_1, \dots, c_m) \in \mathcal{M}_n(K)$ vérifient $|\det(\pi)| \leq \|c_1\|_2 \dots \|c_m\|_2$ avec égalité si et seulement si les (c_i) sont orthogonaux.

- Romboid
- Carré
- Cercle