149 — Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $E = \mathbb{K}^n$

I/ Valeurs propres, vecteurs propres :

1) Généralités.

Définition 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $v \in E$ est dit vecteur propre de f si : i) $v \neq 0$ ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f(v) = \lambda v$. λ est dite valeur propre de f associée à v.

Définition 2 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda := \{v \in E, f(v) = \lambda v\}$. E_λ est un sous-espace propre de E.

Proposition 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $\chi_f(X) := \det(X I_d - f)$. χ_f est dit polynôme caractéristique de f.

Exemple 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, représenté dans la base canonique par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Alors les valeurs propres de f sont 2 et 3.

Définition 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble de vp de f est appelé spectre de f et le rayon spectral $\rho(f) := \max |\lambda|$.

Exemple 6 : Pour l'exemple 4, $\rho(f) = 3$ et $S_p(f) = \{2, 3\}$.

Proposition 7 : $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in S_p(f)$. $A = \mathrm{Mat}(f)$ dans la base canonique. Trouver les valeurs propres associé à λ revient à résoudre $(A - \lambda I_d)v = 0$.

Exemple 8 : $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Exemples et applications

Théorème 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de vecteurs propres.

Remarque 10 : Si f est diagonalisable, $A = \mathrm{Mat}_B(f)$. On a alors $A = PDP^{-1}$ où P est formée des vecteurs propres et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Application 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Application 12 : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 4V_n \end{cases}$ tq $\begin{pmatrix} U_0 = 2 \\ V_0 = 1 \end{pmatrix}$

On a $X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X_{n+1} = A^n X_0 \Rightarrow$ $U_n = 5 \times 2^n - 3 \times 3^n$, $V_n = -5 \times 2^n + 6 \times 3^n$

Exemple 13 : $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ alors $\chi_M = P$.

Exemple 14 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A nilpotente d'ordre n. Alors les vp de A sont nulles.

II/ Normes et conditionnement sur les espaces de matrices.

1) Normes matricielles

Définition 15 : Normes

Remarque 16 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$.

Définition 17 : Soit $|||.|||$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle est dite sous multiplicative si $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$.

Définition 18 : Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On lui associe une norme subordonnée définie par $|||A||| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Proposition 19 : Soit $|||.|||$ une norme subordonnée.

1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

2) $\exists x_A \in \mathbb{K}^n$, $|||A||| = \frac{\|Ax_A\|}{\|x_A\|}$

3) $|||.|||$ est sous multiplicative.

Exemple 20 : $|||A|||_1 = \sup_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$ $\quad |||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$

2) Conditionnement d'une matrice.

Définition 21 : Soit une norme matricielle subordonnée. On appelle conditionnement d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ relatif à la norme, la valeur $\mathrm{Cond}(A) = |||A||| \times |||A^{-1}|||$

Proposition 22 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Alors $Ax = b$ admet une unique solution. En posant $A_\varepsilon = A + \varepsilon T$, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $b_\varepsilon = b + \varepsilon \delta$, $\delta \in \mathbb{R}^n$

On a alors $\frac{\|x_\varepsilon - x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\left(\frac{\|A_\varepsilon - A\|}{\|A\|} + \frac{\|b_\varepsilon - b\|}{\|b\|}\right) + O(\varepsilon^2)$

Remarque 23 : La valeur du conditionnement mesure la stabilité du problème $Ax = b$ pour une perturbation.

Définition 24 : Soit A diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses vp. On appelle conditionnement de A, relatif à cette norme $(|||.|||)$ pour le calcul des vp, le réel $\Gamma_{|||.|||}(A) = \inf_{P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \mathrm{cond}(P)$

Remarque 25 : $\Gamma(A) \geq 1$.

Proposition 26 : Soit A diagonalisable. Si A est auto-adjointe Alors $\Gamma_2(A) = 1$

Théorème 27 : Soit A diago
Localisation de vp d'une matrice.

Exemple 28 : ?

III/ Méthode de calcul approché et localisation

1) Méthode itérative.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, soit $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre $Ax = b$

Définition 29 : On appelle décomposition régulière de A, un couple (M, N) de matrice avec M inversible telle que $A = M - N$. Une méthode itérative basée sur la décomposition (M, N) est définie par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ M x_{k+1} = N x_k + b. \end{cases}$

Théorème 30 : La méthode itérative définie précédemment converge si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Exemple 31 : (Jacobi) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$
On appelle méthode de Jacobi la méthode itérative associée à $M = D$ $N = D - A$.

2) Méthode QR.

Thm 32 : Décomposition QR

Exemple 33 : Allaire

Définition 34 : Suite de la méthode QR

Thm 35 : Méthode QR.

3) Localisation de valeurs propres :

Thm 36 : Gershgoring - Hadamard

Exemple 37 : Lascause

Application 38 : Matrice compagnon.

Théorème 39 : Gershgoring - Hadamard

Grifone I
Allaire II
III 1
Ciarlet → QR
(exemple Allaire
Lascaux → Localisation.