

Soit K un corps commutatif :

I/ Racine d'un polynôme :

1) Racine d'un polynôme et multiplicité :

Définition 1 : Soit $P \in K[X]$ et ℓ une extension de K .

On dit que $a \in \ell$ est une racine de P si $P(a) = 0$.

Proposition 2 : Soit $a \in K$ et $P \in K[X]$, a est racine de P si et seulement si $X - a \mid P$.

Définition 3 : Soit $P \in K[X]$, $a \in K$ et $h \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est racine d'ordre h de P si $(X - a)^h \mid P$ et $(X - a)^{h+1} \nmid P$.

Proposition 4 : Soit $P \in K[X]$ et $a_1, \dots, a_r \in K$ des racines de P d'ordre $h_1, \dots, h_r$. Alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $P(X) = (X - a_1)^{h_1} \dots (X - a_r)^{h_r} Q(X)$ et $Q(a_i) \neq 0$.

Conséquence 5 : Si $P \in K[X]$ est de degré $n \geq 1$, alors P a au plus n racines (comptées avec multiplicité).

Contre-exemple 6 : Si on remplace K par un anneau, la propriété précédente est fautive. Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $P = X(X-1)(X-2)$ a 3 racines 0, 1, 2 mais $\deg(P) = 2$.

Proposition 7 : Soit $P \in K[X]$ tel que $\forall x \in K, P(x) = 0$. Si K est infini, on a $P = 0$.

Contre-exemple 8 : Si K est fini. En notant $a_1, \dots, a_n$ les éléments de K , et $P = (X - a_1) \dots (X - a_n)$, P est non nul mais $\forall x \in K, P(x) = 0$.

Définition 9 : Un polynôme $P \in K[X]$ est dit scindé sur K si on

$\otimes$ D'après l'exercice $P = \lambda(X - a_1)^{h_1} \dots (X - a_r)^{h_r}$ où $\lambda \in K$ et $a_i \in K$.

Proposition 10 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique de M .

Application 11 : On note $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_n\}$. Son adhérence est $\overline{\mathcal{A}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p(q) \in \mathbb{C}(0, 1)\}$.

Théorème 12 : Relations coefficients - Racines : Soit $P = a_0 X^n + \dots + a_n \in K[X]$ scindé sur K dont les racines sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$$\text{Alors } \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \sigma_p := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} = (-1)^p \frac{a_p}{a_0}$$

$$\text{En particulier } \sigma_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_1}{a_0} \quad \sigma_n = \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

2) Dérivation dans $K[X]$.

Définition 13 : Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K[X]$. On appelle polynôme dérivé de P , le polynôme $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$.

Remarque 14 : Si P est constant, $P' = 0$. Si K est caractéristique p et $P = X^p + 1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, $P' = 0$ car p est divisible par p .

Théorème 15 : Si K est de caractéristique 0 et si $P \in K[X]$, $P' \neq 0$ alors $a \in K$ est racine d'ordre h de P si et seulement si

$$i) \forall i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq h-1, F^{(i)}(a) = 0 \quad ii) F^{(h)}(a) \neq 0$$

Contre-exemple 16 : $F = X^3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ et $a = \overline{0}$ montre que le théorème est faux en caractéristique non nulle.

II Polynômes symétriques

Soit A un anneau commutatif unitaire.

1) Définitions:

Définition 17: Un polynôme $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est dit symétrique si $\forall \sigma \in S_n, P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$.

Exemple 18: Dans $R[X, Y, Z]$, $P = XY + YZ + ZX$ est symétrique.

Définition 19: Symétrisé d'un monôme: Soit $\Pi = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ le polynôme $\sum_{\sigma \text{ distinct}} \Pi_{\sigma}$ est symétrique dans $A[X_1, \dots, X_n]$.
On l'appelle symétrisé de Π dans $A[X_1, \dots, X_n]$ noté $\Sigma \Pi$.

Exemple 20: Dans $K[X_1, X_2]$, $\Sigma X_1^2 X_2 = X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2$

- Dans $K[X_1, X_2, X_3]$, $\Sigma X_1^2 X_2 = X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_1^2 X_3 + X_1 X_2^2 X_3 + X_1^2 X_3^2 + X_1 X_2^2 X_3^2$

Remarque 21: On voit par l'exemple que les symétrisés d'un monôme dans $A[X_1, \dots, X_m]$ et dans $A[X_1, \dots, X_n]$ sont différents si $m \neq n$.

2) Polynômes symétriques élémentaires.

Définition 22: On appelle polynômes symétriques élémentaires de $A[X_1, \dots, X_n]$ les polynômes notés Σ_p ($1 \leq p \leq n$) définis par $\Sigma_p = \Sigma X_1 \dots X_p = \Sigma_{i_1 < \dots < i_p} X_{i_1} \dots X_{i_p}$

Remarque 23: En particulier, on a

$$\Sigma_1 = \Sigma X_i = X_1 + \dots + X_n$$

$$\Sigma_2 = \Sigma X_1 X_2 = \sum_{i < j} X_i X_j$$

$$\Sigma_n = X_1 \dots X_n$$

Proposition 24: Les polynômes symétriques élémentaires vérifient:

$$(\Sigma - X_1) \dots (\Sigma - X_n) = \Sigma^n - \Sigma \Sigma^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \Sigma \Sigma^{n-1}$$

Remarque 25: Pour un polynôme $P = X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n} \in K[X]$ écrire sur K . On retrouve les relations coefficients racines.

Proposition 26: Si $\phi \in A[X_1, \dots, X_n]$, alors $\phi(\Sigma_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \Sigma_n(X_1, \dots, X_n))$ est un polynôme symétrique de $A[X_1, \dots, X_n]$

Théorème 27: Soit A un anneau commutatif unitaire et

$P \in A[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme symétrique de $A[X_1, \dots, X_n]$. Il existe un unique polynôme $\phi \in A[X_1, \dots, X_n]$ tq $P = \phi(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$

Exemple 28: $\Sigma X_i^2 = \Sigma_1^2 - 2\Sigma_2$
 $\Sigma X_1^2 X_2 = \Sigma_1 \Sigma_2 - 3\Sigma_3$

III Localisation et comptage de racines

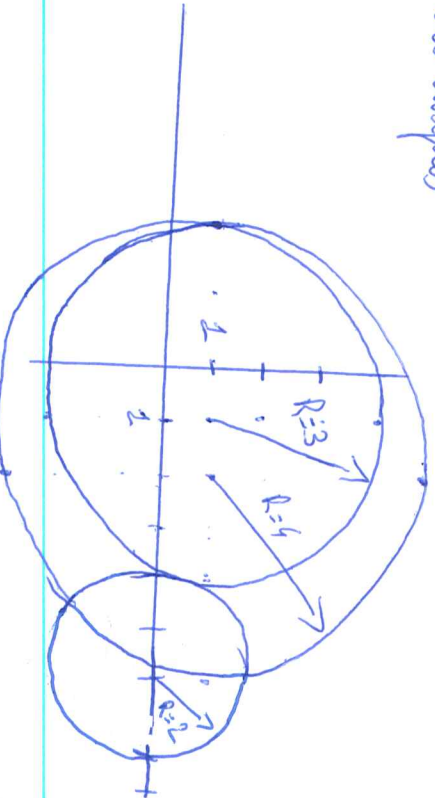
Théorème 25: Cercle de Goursat - Hadamard: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit N valeurs propres de A appartenant à l'union de N disques D_k du plan complexe, soit:

$\lambda \in \bigcup_{k=1}^N D_k$ ou $\bar{D}_k$, appelé le disque de cercle de Goursat est défini par $|\lambda - a_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$

Exemple 30: Soit $A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}$

des valeurs propres sont localisées dans l'union des disques



Application 31: Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$. Soit le

polynôme caractéristique associé à la matrice companion $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, on peut alors localiser les

Théorème 32: Forme de Hadamard: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n

et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines distinctes de multiplicité $m_1, \dots, m_n$. On définit $\Delta_k = \sum_{j=1}^n m_j \alpha_j^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et on pose

$$V(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \Delta(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \delta_{i+j} x_i x_j$$

Alors Δ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de signature (p, q) où $p+q = n$ et $p-q$ est le nombre de racines réelles de P .

Conclusion page 1/2

Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur (cercle de Goursat)

NH2G2 (Hadamard)