102

Groupes des nombres complexes de module 1. Sous groupe des racines n-ième de l'unité. Application.

I/ Nombres complexes de module 1 :

1) Le groupe $\mathbb{U}$.

<u>Proposition 1</u> : L'application $|\cdot| : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$, $z \mapsto |z|$ défini un morphisme de groupe

<u>Définition 2</u> : $\mathbb{U} := \mathrm{Ker}(|\cdot|)$

<u>Proposition 3</u> : $\mathbb{U}$ est un groupe et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

<u>Exemple 4</u> : $1, -1, i, j \in \mathbb{U}$

<u>Proposition 5</u> : L'application $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}^*$, $(r, u) \mapsto ru$ définit un isomorphisme du groupe produit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ sur $\mathbb{C}^*$.

<u>Définition 6</u> : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est l'exponentielle complexe.

<u>Proposition 7</u> : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

<u>Proposition 8</u> : L'application $\mathcal{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $x \mapsto e^{ix}$ est un morphisme surjectif de noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{E}) = 2\pi\mathbb{Z}$ où $\pi = 2 \times \min_{\alpha > 0} \{\mathrm{Re}(\mathcal{E}(\alpha)) = 0\}$

<u>Application 9</u> : $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$.

2) Trigonométrie.

<u>Définition 10</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$
$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$

<u>Remarque 11</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

<u>Proposition 12</u> : Moivre : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(inx) = (e^{ix})^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

<u>Proposition 13</u> : Euler : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

<u>Application 14</u> :

$$\cos^n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{2p}} \left[\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos((2p-2k)x) \right) & \text{si } n = 2p \\ \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \cos((2p+1-2k)x) & \text{si } n = 2p-1. \end{cases}$$

3) Arguments.

<u>Définition 15</u> : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument de z tout réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. L'ensemble des arguments sera noté $\arg(z)$.

Proposition 16 : Si $z \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\arg(z)$ est non vide et pour tout $\theta_0 \in \arg(z)$ on a $\arg(z) = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 17 : On appelle argument principal d'un nombre $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, et on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'unique réel de $\arg(z) \cap]-\pi, \pi[$.

Définition 18 : $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1 \right\}$

Proposition 19 : L'application $\mathbb{U} \to SO_2(\mathbb{R})$, $u = c + is \mapsto \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupe.

II / Racines n-ièmes et cyclotomie.

1) Racines n-ièmes

Proposition 20 : Soit $n \geq 2$. L'application $f_n : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $z \mapsto z^n$ est un morphisme de groupe surjectif. Son noyau est $\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$. $\mathbb{U}_n$ s'appelle le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 21 : Le groupe $\mathbb{U}_n$ est cyclique. Ses générateurs sont les $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \wedge n = 1$

Définition 22 : On appelle racine n-ième primitive de l'unité dans $\mathbb{C}$ tout générateur du groupe $\mathbb{U}_n$

Proposition 23 : Soit $n \geq 2$. Le seul sous-groupe fini de cardinal n de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est $\mathbb{U}_n$.

Proposition 24 : Les seuls sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont les sous-groupes des racines de l'unité et S^1.

2) Cyclotomie.

Définition 25 : On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, le n-ième polynôme cyclotomique $\phi_n(X) := \prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \wedge n = 1}} (X - e^{\frac{i2k\pi}{n}})$

Proposition 26 : Les polynômes cyclotomiques sont des polynômes unitaires à coefficients entiers.

Définition 27 : $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est définie par $\phi(n) = \mathrm{card}\{ r \mid 0 \leq r < n, r \wedge n = 1 \}$

Proposition 28 : Le degré de ϕ_n est $\phi(n)$ et on a

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \phi_d(X)$$

Exemple 29 : $\phi_1(X) = X - 1$

$\phi_2(X) = X + 1$

$\phi_3(X) = X^2 + X + 1$.

D1/

Théorème 30 : Dirichlet faible : Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $\lambda n+1$, $\lambda \in \mathbb{N}$

III / Applications :

Définition 31 : On appelle groupe unitaire le groupe $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = Id\}$.

Exemple 32 : $A = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \in U_n(\mathbb{C})$.

Proposition 33 : Les valeurs propres de $A \in U_n(\mathbb{C})$ sont toutes de module 1.

D2/

Théorème 34 : Racine de l'identité :
Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_n\}$
$\overline{\mathcal{A}}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont de module 1.

Théorème 35 : Décomposition polaire
$U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \simeq GL_n(\mathbb{C})$

- Algèbre 1. Arnaudiès et Fraysse
- Algèbre L3. Szpirglas.
- Grifone
- FGN et NH2G2.