101

Groupe opérant sur un ensemble. Exemple et applications

G un groupe X un ensemble

I/ Notion d'Action de groupe.

1) Action de groupe :

Définition 1 : On appelle action (à gauche) de G sur X toute application $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \longmapsto g.x$ vérifiant les conditions :

1) $g.(h.x) = (gh).x \quad \forall (g,h) \in G^2$ et $\forall x \in X$.

2) $e.x = x \quad \forall x \in X$.

Exemple 2 : Le groupe $S(X)$ des bijections de X opère sur X par l'action $(\sigma, x) \longmapsto \sigma.x = \sigma(x)$

Définition 3 : On appelle morphisme structurel de l'action de G sur X le morphisme $\varphi : G \longrightarrow S(X)$, $g \longmapsto \sigma_g$ où $\sigma_g : x \longmapsto g.x$

Théorème 4 : La donnée de la l'action de G sur X ou des morphisme structurel est équivalente. (Il y a une bijection entre l'ensemble des actions de G sur X et l'ensemble des morphisme de G sur $S(X)$.

2) Orbites et stabilisateurs

Définition 5 : i) Soit G agissant sur X et $x \in X$. On appelle orbite de x sous G l'ensemble $G.x = \{g.x \mid g \in G\} \subset X$

On dit que G opère transitivement sur X s'il existe exactement une orbite dans X.

ii) On appelle stabilisateur de x dans G le sous-groupe $G_x := \{g \in G \mid g.x = x\} \subset G$. On dit que G agit librement sur X si $G_x = \{e\}$ $\forall x \in X$.

Proposition 6 : Les orbites de X forment une partition de X.

Proposition 7 : Soit $\varphi : G \to S(X)$ une action. On a alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in X} G_x$

Définition 8 : Une action $\varphi : G \to S(X)$ est fidèle si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$.

Remarque 9 : Une action libre est toujours fidèle

3/ Formule des classes

Proposition 10 : Soit G agissant sur X, $x \in X$. L'application $f : G/G_x \longrightarrow G.x$, $\bar{g} \longmapsto gx$ est une bijection

Corollaire 11 : Soit G agissant sur X et $x \in X$. On a :

1) $|G.x| = (G : G_x)$ 2) $|G| = |G_x||G.x|$

3) Si G est fini alors $|G.x| = \frac{|G|}{|G_x|}$

Exemple 12 : Un groupe fini à n éléments ayant 2 classes de conjugaison est d'ordre 2

Corollaire 13 : Formule des classes. Soit G agissant sur X (finis). Si $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ est la partition de X en orbites sous l'action de G et si $x_i \in X_i$ est un élément de l'orbite, alors

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$$

Proposition 14 : Formule de Burnside : Soit $g \in G$, notons X^g l'ensemble des points fixes de X sous l'action de $\langle g \rangle$. Le nombre d'orbite de X sous l'action de G est : $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$

II / Actions classiques.

1) Translation.

Definition 15 : Un sous-groupe G de S_n est transitif si l'action $\varphi : G \to S_n$ induite de G sur $\{1, \dots, n\}$ est transitive.

Théorème 16 : Cayley Tout groupe fini G d'ordre n est isomorphe à un sous groupe transitif de S_n.

Proposition 17 : Soit H sous-groupe de G et $\varphi . G \to S_{(G:H)}$ le morphisme structurel de l'operation par translation à gauche de G sur l'ensemble des classes à gauche G/H. Alors $Ker(\varphi) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$

2) Conjugaison

Définition 18 : On définit l'action de G sur lui-même par conjugaison par
$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto ghg^{-1}$$

Definition 19 : L'orbite $\{ghg^{-1} \mid g \in G\}$ de h sous l'action par conjugaison s'appelle classe de conjugaison de h. Le stabilisateur $\{g \in G \mid ghg^{-1} = h\}$ de h s'appelle centralisateur de h dans G noté $Z_G(h)$

Remarque 20 : L'action de conjugaison de $G \neq \{e\}$ sur lui-même n'est jamais libre.

Proposition 21 : Notons $L(G) := \{H \mid H \text{ ss-groupe de } G\}$ G agit par conjugaison sur $L(G)$ par $g . H = gHg^{-1}$

3) p-groupe et Sylow. Soit p premier.

Définition 22 : Soit p un nombre premier. Un p-groupe est un groupe dont l'ordre de tout élément est une puissance de p

Proposition 23 : Soit p un nombre premier, G un p-groupe agissant sur X fini. Alors $|X^G| \equiv |X| \; [p]$

Théorème 24 : Cauchy Soit G un groupe fini d'ordre divisible par un nombre premier p. Alors, il existe dans G au moins un élement d'ordre p.

Proposition 25 : Soit $G \neq \{e\}$ un p-groupe fini. Le centre $Z(G)$ de G n'est pas réduit à $\{e\}$. En particulier, un p-groupe fini d'ordre non premier n'est jamais simple.

Corollaire 26 : Un groupe d'ordre p^2 est abélien.

Définition 27 : Soit G de cardinal n et p un diviseur premier de n. Si $n = p^\alpha m$ où $p \nmid m$, on appelle p-sousgroupe de Sylow de G un sous-groupe de cardinal p^α.

Lemme 28 : Soit $|G| = n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$ et H un ss-gp de G Soit S un p-Sylow de G. Alors, $\exists a \in G$, $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H.

D1

Théorème 29 (Sylow) Soit G de cardinal $|G| = p^{\alpha} m$, $p \nmid m$

1) Si H est un sous-groupe de G qui est un p-groupe, il existe un p-Sylow S avec $H \subset S$

2) Les p-Sylow sont tous conjugués (et donc leur nombre $k \mid m$)

3) On a $k \equiv 1 \, [p]$ (donc $k \mid m$)

Théorème 30 (Sylow) Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $|G|$, alors G contient au moins un p-sous-groupe de Sylow

Application 31 : Un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.

III / Les actions de groupe sur l'espace des matrices

1/ Action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence.

On fait agir le groupe $G = GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par l'action

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q), A) &\longmapsto PAQ^{-1} \end{aligned}$$

Définition 32 : Deux matrices A,B de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes si $\exists (P,Q) \in G$ telles que $B = PAQ^{-1}$

Proposition 33 : Une matrice A est de rang r si et seulement si, elle est équivalente à $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 34 : Les orbites de l'action de groupes sont les $O_r = \{ A \in E \mid rg(A) = r \}$ et deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont dans la même orbite.

2/ Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison.

Proposition 35 : L'application

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P,A) &\longmapsto PAP^{-1} \end{aligned}$$

définit une action de groupe.

Définition 36 : Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites semblables.

Théorème 37 : Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ les matrices $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ sont équivalentes.