NOM : MEYER **Prénom :** Nicolas **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : Exemples de problèmes d'interversion de limites * 247

Autre sujet : Réf : Gourdon, Pommellet, Hauchecorne

Pas trop dévs

Dans toute la leçon, E désigne un evn, $A \subset E$ non vide, F désigne un espace de Banach (en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Interversion pour des suites de fonctions [G]

Rappel 1 : Soit $f_n : A \to F$, $f : A \to F$. On dit que f_n converge simplement si $\forall x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$.

Rappel 2 : On dit que f_n converge uniformément (CVU) vers f si $f_n - f$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Prop 3 : Si f_n CVU vers f alors f_n converge simplement vers f (réciproque fausse).

1. lim - lim [P]

Th 4 : Soit $f_n : A \to F$ qui CVU vers f, $a \in \bar{A}$. On suppose que $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_n$, alors

1. $\ell_n \longrightarrow \ell \in F$
2. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Ex 5 : $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$ sur $]0, +\infty[$

$f_n(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ et $f_n(x)$ CVS vers $f \equiv 0$, donc pas de CVU.

2. lim - continuité [G]

Th 6 : Si $f_n : A \to F$ CVU vers f et f_n continues, alors f est continue.

Ex 7 : $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}$ $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVU}} (x \mapsto e^{-x})$

C-Ex 8 : [H] $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$

$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ discontinue, donc pas de CVU

Rq 9 : La CVU sur tout compact suffit car la continuité est une notion locale.

3. limite - dérivation [G]

Th 10 : Soit $f_n : I \to F$ C^1 ; on suppose :

1. qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f_n(x_0)$ converge.
2. que $f_n' \xrightarrow{\text{CVU}} g$.

Alors f_n CVU sur I vers f C^1 telle que $f' = g$.

C-ex 11 : [H] $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{CVU}} 0$ mais f_n' ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$

C-ex 12 : $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \xrightarrow{\text{CVU}} 0$

et $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

II. Interversion pour les séries de fonctions [G]

Rappel 13 : $\sum f_n$ converge normalement si f_n est bornée et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Cela entraîne la CVU.

Rque 14 : Les ths 4-6-10 restent vrais pour les séries de fonctions (on les applique à la somme partielle).

Ex 15 : $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$

$\sum f_n$ CVN sur $[0, M]$ donc la limite est continue sur $[0, M]$ $\forall M > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+$.

• $\sum (-1)^n f_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite est continue sur $\mathbb{R}_+$

Ex 16 : [P] $f_n(x) = \frac{e^{(2^n i x)}}{n!}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

et $f_n^{(k)}(x) = \frac{i^k 2^{nk} \exp(2^n i x)}{n!}$; $\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \frac{2^{nk}}{n!}$

donc la somme de la série $\sum f_n$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

C-ex 17 : [H] $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$ il y a CVS mais $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est discontinue en π

[P] <u>Ex 18</u> : • $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$

(on se restreint à $[a, +\infty[$ pour $a > 1$)

• ζ est même de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ $\boxed{\text{lim - Somme}}$ (Peut faire 1 partie à part)

[G] <u>Application aux séries entières</u>

Cogs de la théorie d'interversion (CVN)

<u>Déf 19</u> : Une série entière est une série de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$.

<u>Rappel 20</u> : Il existe R (rayon de convergence) $\in [0, +\infty]$ tel que

- $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument
- $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.
- si $r < R$, $\sum a_n z^n$ CVN sur $D(0, r)$

<u>Th 21</u> : Une série entière est continue sur $D(0, R)$

<u>Th 22</u> : • $f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est C^∞

• $f : D(0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est holomorphe

De plus, si $k \in \mathbb{N}$, on obtient les dérivées de f en dérivant terme à terme : $f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ etc. et plus généralement $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

[P] <u>Ex 23</u> : 1 exp : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est holomorphe.

2. $\forall z \in D(0, 1)$, $z \longmapsto \mathrm{Log}(1 + z) := \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ est holomorphe sur $D(0, 1)$

[P] <u>Etude au bord du disque</u>

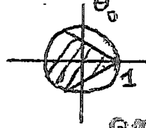
<u>Th 24 (Abel)</u> : Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de CV 1 telle que $\sum a_n$ est convergente.

Alors $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n$

<u>Ex 25</u> : En utilisant le DSE de $x \mapsto \ln(1 + x)$ et $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ sur $]-1, 1[$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

<u>Th 26</u> : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\underline{CV}$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $D(0, 1)$. Soit $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \, / \, |z| < 1, \exists \rho > 0 \ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \, / \, z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$ [G] D1



Alors $f(z) \underset{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ transfo d'Abel

applis ?

III. Interversion dans les séries doubles

<u>Rque 27</u> : On peut voir une série $\sum u_n$ comme une intégrale sur $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage :

$$\int u \, d\delta_n = \sum_{n \geq 0} u_n$$

$\boxed{\text{lim - intégrale}}$

<u>Th 28 (Beppo-Levi)</u> : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n : X \to \mathbb{R}$ mesurable positive telle que $f_n \leq f_{n+1}$

Alors $f_n \to f$ simplement et $\int_X f_n \, d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu$

<u>Csq 29</u> : Si $f_n : X \to \mathbb{R}$ est mesurable positive, alors

(Fubini) $\sum_{n \geq 0} \left(\int f_n \, d\mu \right) = \int \sum_{n \geq 0} f_n \, d\mu$

<u>Appl 30</u> : Soit $u_{n,m} \geq 0$; alors $\sum_n \sum_m u_{n,m} = \sum_m \sum_n u_{n,m}$

<u>Ex 31</u> : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ $x > 1$, alors [G]

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k} = 1 - \gamma$$

(constante d'Euler)

TR 32 : (Convergence dominée) Soit $(f_n : X \to \mathbb{C})$ intégrable t.q.

- $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pp $x \in X$
- $\exists \varphi \in L^1 \,/\, \forall n \in \mathbb{N} \; |f_n| \leq \varphi$

Alors $f \in L^1$ et $\int_X f = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n$

Csq 33 : Si $f_n : X \to \mathbb{C}$ est intégrable et $\sum \|f_n\|_1 < \infty$,

alors $\sum_{n \geq 0} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X \left(\sum_{n \geq 0} f_n \right) d\mu$

Appl 34 : Soit $u_{n,m} \in \mathbb{C}$, si $\sum_{n,m} |u_{n,m}| < \infty$, alors

$$\sum_n \sum_m u_{n,m} = \sum_m \sum_n u_{n,m}$$

[P] D2 **Ex 35 :** Soit B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$,

alors $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$ (nombres de Bell)

[H] **C-ex 36 :** $u_{n,p} = \begin{cases} -\frac{1}{2^n} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Alors $\sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p} = \sum_{p \geq 0} 0 = 0$

et $\sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} u_{n,p}$ diverge

convergence vérifiée? pour ce réel/formel? Egalité?

$B_n \leq n!$: plus simple

C-ex 37 : $u_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ -\frac{1}{2^{p-n}} & \text{si } n < p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$

alors $\sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p} = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} = 2$

et $\sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} u_{n,p} = \sum_{n \geq 0} 0 = 0$

IV. Interversion en calcul différentiel

1. Continuité

Prop 38 : Soit f : $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et $(a,b) \in \mathcal{U}$

alors $\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x,y)$

Bizarre ? C'est la déf de $(x,y) \to (a,b)$ CV du couple.

C-ex 39 : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = 1 \neq 0 = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y)$

2. Dérivées partielles

[G]

TR 40 (Schwarz) : Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to F$ deux fois différentiable. Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$, $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a).$$

C-ex 41 : (Peano) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ [H]

alors $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

C-ex 42 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{sinon} \end{cases}$

alors $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0)$