Oraux blancs

NOM : PINAULT Prénom : Laurelline Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 243 Convergences des séries entières, propriétés de la somme. Exples et applications.

Autre sujet :

(105. Gpe des permutations d'un ensemble fini).

Def 1. On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$, $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

I Étude du domaine de convergence

1 Disque de convergence

Prop 2 (Lemme d'Abel). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors : (i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0| \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument
(ii) $\forall\, 0 < r < z_0$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$

Def 3 (Rayon de convergence) Soit $\sum a_n z^n$ une série ent. On note $R = \sup\{r \geq 0, (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$ le rayon de convergence de cette série entière.

Def 4 (Disque de convergence). On note disque de convergence le disque ouvert $D_0(R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.
Le lemme d'abel assure que :
- $\forall z \in D_0(R)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- $\forall z$, $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.
- $\forall r$, $0 < r < R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z, |z| \leq r\}$.

Prop 5. Une série entière converge normalement sur tout compact contenu dans son disque de convergence.

2 Calcul du rayon de convergence.

Exple 6. On note a_n la n-ième décimale de $\sqrt{2}$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1

Exple 7. Le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$ est 1

Prop 8 (Règle de Cauchy). Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in [0,+\infty]$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $1/\lambda$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$)

Prop 9 (Règle de d'Alembert) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in [0,+\infty]$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $1/\lambda$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$)

Exple 10. $\sum z^n/n!$ a un rayon de convergence infini.

Exple 11. $\sum n!\, z^n$ a un rayon de convergence nul.

Exple 12. Le rayon de convergence de $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ est $1/e$.

3 Opérations sur les séries entières.

Prop 13. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Prop 14. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b. Alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus pour tout $z \in D_0(R_a) \cap D_0(R_b)$:
$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n) z^n$.

Rq 15. Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$

Prop 16. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b. La série entière

$\sum c_n z^n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelé produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R est $\geq \min(R_a, R_b)$. De plus pour tout $z \in D_0(R_a) \cap D_0(R_b)$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

II) Propriétés de la somme.

($\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de cvgce R et de somme f)

Prop 17. $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D_0(R)$.

Prop 18. $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$. $\sum n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$ et $\forall x \in]-R, R[$: $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Cor 19. f somme de $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. De plus $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R, R[$ d'une série entière et $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$. Donc $\forall z \in D_0(R)$, $f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$

Csq 20. Si f et g sommes de séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$.

Prop 21. Si $[\alpha, \beta] \subset]-R, R[$ alors f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ et : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$

Prop 22. La somme d'une série entière est dérivable par rapport à la variable complexe sur son disque de convergence.

Réciproquement, si $g : D = \{z, |z| < R\} \to \mathbb{C}$, continûment dérivable sur D alors g est la somme d'une série entière sur $\mathbb{C}$.

Prop 23. (Principe des zéros isolés). S'il existe une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, z_p \in \mathbb{C}^* \\ z_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, f(z_p) = 0 \end{cases}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Prop 24. (Formule de Cauchy). $\forall r \in]0, R[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta = 2\pi r^n a_n$.

Application 25 (Thm de Liouville). Si $R = +\infty$ et f est bornée alors f est constante.

III) Étude du comportement au bord du disque.

Exple 26. • $\sum z^n$ diverge si $|z| = 1$

• $\sum z^n/n$ diverge en 1 et converge en -1.

• $\sum z^n/n^2$ converge pour tout $|z| = 1$

Thm 27 (Abel angulaire). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 tq $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur $D_0(R)$. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. On pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ et $\exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$. Alors
$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exple 28. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$.

Rq 29. La réciproque est en général fausse. $\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z| < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.

IV) Applications (Exple d'.)

1] Équations différentielles

Il peut être utile de chercher une solution sous la forme de la somme d'une série entière.

Exple 30. $x \mapsto x - 1$ est une solution de $(E) : (2x - x^2)y' + (x-1)y - 1 = 0$

Exple 31. Les solutions développables en série entière de (E) $xy'' + y' + y = 0$ est la dte vectorielle engendrée par :
$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n/(n!)^2$$

2 Problèmes de dénombrement.

Il peut être utile de considérer la série génératrice ou la série exponentielle génératrice d'une suite liée à un problème de dénombrement pour déterminer la-dite suite.

Exple 32 (Nombres de Bell) On note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ avec $B_0 = 1$. Alors.

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Commentaires

→ Plan

- I : plus d'exples !!
  des exples de fonc° classiques, exp, log, ...
  un bon exple pr le pdt de cauchy $\underset{\uparrow R=1}{\frac{1}{1-z}} \times \underset{\uparrow R=\infty}{(1-z)} = \underset{\uparrow R=\infty}{1}$

- + d'applica°.
  proba ?
  dénombremt : mettre un autre exple av une autre technique.
  ajouter les déf de série gén. et de série exp gén.

- Liouville. Bien. Mettre un d'exple ? Mettre version av poly ?

- Critères : ajouter le critères d'Hadamard.
  Permet de s'affranchir des ss-suites → 0
  ex : $\sum 2^{n(-1)^n} z^n$. $R = 1/2$

- Mettre comportemt au bord du disque avec le ⊙ de cvgce (I) ?

- Exple de fonc° C^∞ non DSE ? (av corr 19).
  $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ prolongée par 0 en 0
  holomorphe ou pas en 0 : pb avec $i^2 = -1$

  + aller voir Berstein (à connaître)

- Mettre explicitement une primitive de série entière (à la place de 21)

- Au bord du disque choses devraient vite compliquée.

→ Qst

- Pquoi on ne fait pas ça av des séries formelles ?
  ↳ On pourrait peut-être le faire mais c'est + facile