

Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

RM
2022-2023

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémité a et b avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

1 Continuité et dérivabilité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1 Continuité des fonctions réelles

Définition 1 : La fonction f est dite continue en un point $a \in I$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. La fonction f est alors continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.

Remarque 2 : On a de manière équivalente que f est continue en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemple 3 : Les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues et les fonctions constantes sont continues.

Proposition 4 : Toutes sommes, produits et compositions de fonctions continues est continue. Il en est de même pour le quotient si les fonctions ne s'annulent pas.

Définition 5 : Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. On définit de même la continuité à droite.

Exemple 6 : La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $x \mapsto [x]$ est continue à droite en $x = 2$ mais pas continue à gauche.

Proposition 7 : Une fonction f est continue en $a \in \overset{\circ}{I}$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a .

Remarque 8 : On en déduit par exemple que la fonction $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en 2.

Théorème (caractérisation séquentielle de la continuité) 9 : La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple 10 : La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Application 11 : Soit $f(I) \subset I$ continue et (u_n) la suite définie par $u_0 = x_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors si la suite x_n converge, c'est vers un point fixe de f .

Proposition 12 : Si $I = [a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et f est continue sur I , alors elle est bornée et atteint ses bornes.

Théorème (de Heine) 13 : La fonction f est continue sur le compact I si et seulement si elle est uniformément continue sur I .

1.2 Dérivabilité des fonctions réelles

Définition 14 : On dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, et est alors noté $f'(a)$. On peut définir de même la dérivée à droite et à gauche.

Proposition 15 : La fonction f est dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$ si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de même valeur.

Proposition 16 : Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Remarque 17 : La réciproque est cependant fausse. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue mais non dérivable en 0.

Remarque/Exemple 18 : Une fonction dérivée n'est pas forcément continue. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable en 0, mais f' n'est pas continue en 0.

Proposition 19 : Soit f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Alors

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
- Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- si $g(a) \neq 0$, alors f/g est dérivable en a et $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
- Si $g(I) \subset I$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a) = g'(a)(f' \circ g)(a)$.

Définition 20 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée n -ième de f la fonction $f^{(n)}$ qui est f dérivée n fois. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue. f est $\mathcal{C}^\infty$ si elle est $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 21 : Par les résultats précédents, la somme, produit, quotient composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$.

Proposition 22 : Soit f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent. Alors le produit fg est n fois dérivable en a et

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Exemple 23 : Mettre le tableau en annexe les dérivées des fonctions usuelles.

2 Théorèmes fondamentaux des fonctions réelles

2.1 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème 24 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 25 : On a la formulation équivalente. Si $f(a) \leq f(b)$ avec $a < b$, alors pour tout γ tel que $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Exemple 26 : L'équation $e^x = x$ admet une solution sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Darboux) 27 : Si f est dérivable sur I , alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que $f'(I)$ est un intervalle.

2.2 Théorème de Rolle et applications

Proposition 28 : Si f admet un extremum relatif en $c \in \overset{\circ}{I}$ et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.

Théorème (de Rolle) 29 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 30 : Toutes les hypothèses sont importantes :

- si $f(a) \neq f(b)$, la fonction $f : x \mapsto x$ sur $[0, 1]$ n'a pas de $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
- si f n'est pas continue au bords avec $f(x) = x$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 1$, ce n'est pas vérifié.
- Si f n'est pas dérivable, avec $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.

Théorème (accroissements finis) 31 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème (inégalité des accroissements finis) 32 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $M > 0$ tel que $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in]a, b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Proposition (Règle de l'Hospital) 33 : Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $l = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = l$.

2.3 Densité

Développement (Théorème de Weierstrass) 34 : Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Dev 1

Remarque 35 : On peut aussi traduire ce théorème par le fait que les fonctions polynomiales sont denses dans l'ensemble $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Corollaire (Théorème de Weierstrass trigonométrique) 36 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est 2π périodique. Alors f est limite uniforme de polynôme trigonométrique, ie de la forme $P : x \rightarrow \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$.

Application 37 : On en déduit du théorème de Weierstrass que si $\int_a^b g(x)x^n dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que g est continue, alors g est la fonction nulle.

2.4 Formule de Taylor

Théorème (Formule de Taylor-Young) 38 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a \in I$ tel que f soit dérivable n -fois en a . Alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange) 39 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégrale) 40 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

3 Stabilité de la continuité et de la dérivabilité

3.1 Suites de fonctions

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonction de I dans $\mathbb{R}$ bornée.

Théorème 41 : Si (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I et que chaque f_n est continue sur I , alors la fonction f est continue sur I .

Remarque 42 : On a besoin de la convergence uniforme. Par exemple, la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$ converge simplement vers $f : x \mapsto \mathbb{1}_1(x)$. qui n'est pas continue.

Corollaire 43 : Si $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I et chaque f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Application 44 : La série de terme générale $\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi^2}{16}.$$

3.2 Intégrale à paramètre

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Théorème (continuité sous le signe intégrale) 45 : Soit $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t)$ tel que

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- Pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Il existe une fonction positive φ , continue par morceaux et intégrable sur I , telle que $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors l'application $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème (dérivation sous le signe intégrale) 46 : Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t)$ tel que

- Pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .

• f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Alors l'application $g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et on a pour tout $x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Remarque 47 : On peut remplacer l'hypothèse de domination seulement sur tout compact.

Application 48 : En étudiant la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$, on trouve que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

4 Une application à l'approximation du nombre pi

L'idée est de trouver une approximation de π en effectuant seulement des opérations usuels, c'est-à-dire seulement l'addition, multiplication et extraction de racine carré.

Développement 49 : Pour tout n entier tel que $n \geq 2$, on note u_n l'aire d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle de centre O de coordonnées $(0, 0)$ et de rayon 1 dans le repère euclidien usuel. Alors la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge linéairement vers π et nous donne une méthode d'approximation de π .

Dev 2

Remarque (A prendre avec des pincettes, c'est fait maison) 50 : Historiquement, Archimède à utiliser plutôt le périmètre du polygone construit noté donc p_n et le périmètre du polygone à l'extérieur du cercle (construit de sorte que ses côtés soient tangent au cercle). On peut alors montrer que ses deux suites convergent vers π . Comme on peut trouver des formules de récurrences pour p_n et P_n dépendant chacune des termes précédents (on a précisément $p_{n+1} = \sqrt{P_{n+1}p_n}$ et $P_{n+1} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$), il suffit alors de calculer chaque terme pour construire les valeurs de p_n et P_n sans connaître π ou les valeurs des cosinus et sinus en 1 point. On prends alors n suffisamment grands et on obtient une approximation de π .

Références :

1. Analyse Gourdon
2. 131 dvp
3. Marvin agreg math (pas très fière)