

Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Bases Hilbertiennes.Exemples et applications.

RM
2022-2023

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Espaces préhilbertien et espaces de Hilbert

1.1 Produit scalaire

Définition 1 : On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique (ou hermitienne dans le cas complexe) qui est définie positive. On le note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$.

Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.

Exemple 2 : Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est définie par $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ et celui de $\mathbb{C}^n$ est $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$.

Remarque 3 : On peut extraire d'un produit scalaire sur H une norme qui est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposition 4 : On a pour tous $x, y \in H$:

- 1) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ (cas réel).
- 2) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$ (cas complexe).

Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz) 5 : Pour tous $x, y \in H$, on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement liées.

Corollaire 6 : Pour chaque $y \in H$, la forme linéaire $\Psi_y : H \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, de norme $\|\Psi_y\| = \|y\|$.

Définition 7 : On dit que deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Remarque 8 : Dans le cas réel, on a $x \perp y$ si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. C'est le théorème de Pythagore généralisé.

Définition 9 : L'orthogonal d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble $A^\perp = \{y \in H, y \perp x, \forall x \in A\}$.

Proposition 10 : Pour toute partie A de H , $A^\perp$ est orthogonal à A . C'est la plus grande partie orthogonale à A . De plus, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .

1.2 Espace de Hilbert

Définition 11 : Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme issue du produit scalaire.

Exemple 12 : Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert car la norme $\|\cdot\|_2$ dans L^2 est la norme associée au produit scalaire usuel.

Développement 13 : Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé (non vide) de H un espace de Hilbert. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $y \in \mathcal{C}$, tel que $d(x, \mathcal{C}) = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\| = \|x - y\|$ et on appelle le point $y = p_{\mathcal{C}}(x)$ le projeté orthogonale de x sur $\mathcal{C}$. On a ainsi

$$\forall z \in \mathcal{C}, \quad \|x - p_{\mathcal{C}}(x)\| \leq \|x - z\|.$$

Il vérifie les propriétés suivante :

- $\forall z \in \mathcal{C}, \operatorname{Re} \langle p_{\mathcal{C}}(x) - x, p_{\mathcal{C}}(x) - z \rangle \leq 0$.
- l'application p est 1-lip.

Application (Théorème de représentation de Riesz) 14 : Soit f une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que, pour tout x de H , $f(x) = \langle a, x \rangle$.

Théorème 15 : Si F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H , alors l'application $p_F : H \rightarrow F$ est une application linéaire continue, et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Théorème 16 : Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout sous-espace vectoriel fermé F , on a $H = F \oplus F^\perp$ et la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ associée est p_F . Elle est donc continue. On dit que p_F est la projection orthogonale sur F .

Corollaire 17 : Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H . Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Application 18 : L'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Dev 2

1.3 Espace dual et adjoint

Définition 19 : On rappelle que le dual de H est

$$H^* = \{\Psi : H \rightarrow \mathbb{K}, \Psi \text{ linéaire continue} \}.$$

Définition 20 : On appelle opérateur sur H toute application linéaire continue $T : H \rightarrow H$.

Proposition 21 : Soit H un espace de Hilbert. Pour tout opérateur T de H , il existe un unique autre opérateur, noté T^* , et appelé l'adjoint de T , tel que pour tout x, y de H , $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. De plus, $\|T\| = \|T^*\|$.

Remarque 22 : Cela se déduit du théorème de représentation de Riesz.

Définition 23 : On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive si $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in X} f(x) = +\infty$.

Développement 24 : Soient H un espace de Hilbert et $J : H \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et coercive, alors il existe $a \in H$ tel que :

$$J(a) = \inf_H J.$$

Dev 2

2 Bases dans un espace de Hilbert

2.1 Familles orthonormées

Définition 25 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'élément de H , indexée par un ensemble arbitraire I , non vide. On dit que c'est une famille orthonormée, ou un système orthonormé, si :

- 1) $\|u_i\| = 1, \forall i \in I$.
- 2) $u_i \perp u_j, \forall i \neq j$.

Exemple 26 : Dans $L^2(0,1)$ (les fonction L^2 1-périodique dans $\mathbb{C}$), on a que $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ est orthonormé avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$.

Proposition 27 : Si le système fini $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormé, alors, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, on a $\|\sum_{k=1}^n a_k u_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$.

Proposition (Inégalité de Bessel) 28 : Soit H un espace préhilbertien. Pour toute famille orthonormée $(u_i)_{i \in I}$ dans H , on a, pour tout $x \in H$ que $\sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Proposition 29 : Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite orthonormée dans H . Si un vecteur $x \in H$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$, alors on a forcément $\xi_n = \langle x, u_n \rangle$ pour tout $n \geq 1$.

Proposition 30 : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite orthonormée et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$. Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$. Alors $P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k u_k$.

Proposition 31 : Si H est un espace de Hilbert, et $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite orthonormée dans H , alors, pour toute suite $(\xi_n)_{n \geq 1} \in l_2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$ converge dans H .

2.2 Bases hilbertiennes

Définition 32 : On dit qu'une suite orthonormée $(u_n)_{n \geq 1}$ dans un espace préhilbertien H est une base orthonormée ou bases hilbertienne de H si l'ensemble $\{u_n; n \geq 1\}$ est total dans H , c'est-à-dire que $H = \overline{\text{Vect}(\{u_n, n \geq 1\})}$.

Remarque 33 : On a ici que ce sont des bases dénombrables car on suppose que H est séparable. Une base hilbertienne n'est en général pas une base algébrique, ce qui justifie sa mise en place.

Théorème 34 : Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormée de H . Alors, tout élément $x \in H$ s'écrit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$. De plus on a la formule de Parseval $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2$.

Théorème 35 : Tout espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées.

3 Utilisation de l'espace L^2

3.1 Avec les séries de Fourier (Surement mieux de rester dans $L^2(\mathbb{T})$ mais je serai pas assez à l'aise)

Définition 36 : On considère l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, qui s'identifie aux fonctions 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de carré intégrable, avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$.

Proposition 37 : La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $e_n : t \mapsto e^{i n t}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.

Proposition 38 : La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Définition 39 : Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. On appelle coefficients de Fourier exponentielle et trigonométrique de f les nombres complexes définis par $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i n t} dt$, $a_n(f) = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(t) \cos n t dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) =$

$A/\pi \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt$.

On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ ou $a_0(f)/2 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx)$.

Remarque 40 : On va montrer après des cas de convergence.

Proposition 41 : En posant $b_0(f) = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Proposition 42 : Soit f une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$. Alors f' est continue par morceaux et 2π -périodique, et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.

Remarque 43 : Si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[0, 2\pi]$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur ce segment, on obtient par itération que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

Proposition 44 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors :

Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos ntdt$.

si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin ntdt$.

Théorème (Égalité de Parseval) 45 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux.

Alors les séries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, $\sum |a_n(f)|^2$, $\sum |b_n(f)|^2$ convergent et on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Théorème (Riemann-Lebesgue) 46 : Soit $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0$.

Théorème (Jordan-Dirichlet) 47 : • Si f est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en ce point x vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. En particulier, si f est continue en x , la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$.

• Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π -périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Application 48 : Ceci nous permet de calculer par exemple les $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

Exemple/Application 49 : En étudiant les coefficients de Fourier de $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$, on en déduit que $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \pi^2/8$.

Application 50 : Nous avons les résultats suivants pour les intégrales de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3.2 Polynômes orthogonaux

Définition 51 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$.

Proposition 52 : L'espace $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert pour $\langle, \rangle_\rho$.

Proposition 53 : Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. Elle est appelée famille des polynômes orthogonaux associés à ρ .

Remarque 54 : Cela est due au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 55 : 1) Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ sont les polynômes de Hermite. On a $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - 1/2, P_3 = X^3 - 3/2X$. On a même $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$.

2) Si $I = [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ sont les polynômes de Legendre. On a $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - 1/3, P_3 = X^3 - 3/5X$. On a même $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$.

Théorème 56 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $\| \cdot \|_\rho$.

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Cours d'analyse fonctionnelle Li
3. Suites et séries ... El Amrani

4. Objectif agrégation Beck
5. Oraux X-ens tome 3 analyse
6. isenmann (rip)