

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

RM
2022-2023

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Normes et continuité

1.1 Normes et normes équivalentes

Définition 1 : Une norme sur E est une application $E \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \|x\|$ telle que :

- i) On a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (séparation).
- ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogénéité).
- iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Muni d'une norme, E est appelé un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Exemple 2 : - $x \mapsto |x|$ et $z \mapsto |z|$ sont des normes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

- Dans $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a les normes classiques suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \|x\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \|x_i\|$$

- Pour $p \in [1, +\infty[$, On a $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|f\|_\infty = \inf\{M : \mu(\{|f| > M\}) = 0\}$ sont des normes sur L^p .

Remarque 3 : Si E est un e.v.n, $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E , qui fait de l'e.v.n E un espace métrique. Sauf mention contraire, c'est cette distance que l'on choisit dans un e.v.n.

Définition 4 : Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dite équivalentes si il existe $a, b \in \mathbb{R}_*^+$ telle que pour tout x de E , $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$.

Remarque 5 : On a alors que les distances de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, et qu'ils définissent la même topologie.

Exemple 6 : On a que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$, avec $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

1.2 Continuité des applications linéaires

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -e.v.n.

Théorème 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une applications linéaire de E dans F . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) f est continue sur E .
- ii) f est continue en 0.
- iii) f est bornée sur la sphère unité $S(0, 1)$ de E .
- iv) Il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.
- v) f est lipschitzienne.

Remarque 8 : Dans la pratique, on utilise souvent le point iii) et iv) pour montrer que f est continue sur E .

Définition 9 : L'ensemble des applications linéaire continues de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E, F)$. On norme $\mathcal{L}_c(E, F)$ en posant

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F), \|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$$

ce qui fait de $\mathcal{L}_c(E, F)$ un e.v.n.

Remarque 10 : Le réel $\|f\|$ est le plus petit réel positif M tel que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$. En particulier, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$.

Proposition 11 : Soient E, F et G trois e.v.n avec $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Définition 12 : L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ est un s.e.v du dual E^* de E . On le note E' et on l'appelle dual topologique de E .

Proposition 13 : Une forme linéaire f sur E est continue si et seulement si son noyau $\text{Ker } f$ est un fermé de E .

1.3 Dimension finie et infinie

Théorème 14 : Si E est de dimension finie, alors toute les normes sont équivalentes.

Remarque 15 : Ceci est donc bien faux en dimension infinie. Par exemple, sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, les normes $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ ne sont pas équivalentes.

Corollaire 16 : Toute application linéaire d'un e.v.n de dimension finie dans un e.v.n (quelconque) est continue.

Remarque 17 : Il faut que l'espace de départ soit bien de dimension finie. Par exemple l'application de dérivation de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ n'est pas continue pour $\|\sum_{i \in I} a_i X^i\| = \sup_{i \in I} |a_i|$, car $\|f(X^n)\| = n$ et $\|X^n\| = 1$.

Corollaire 18 : Tout e.v.n de dimension finie est complet.

Corollaire 19 : Tout s.e.v de dimension finie d'un e.v.n est fermé.

Corollaire 20 : Les parties compactes d'un e.v.n de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Théorème (de Riesz) 21 : E est de dimension finie si et seulement si la boule unité est compacte.

2 Espace de Banach

2.1 Généralités

Définition 22 : On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Exemple 23 : • Pour $p \in [1, +\infty]$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est complet avec $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$.
• $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Remarque 24 : Avec le corollaire 18, on en déduit que tout espace normé de dimension finie est un Banach.

Théorème 25 : Si F est un espace de Banach, l'e.v.n $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Remarque 26 : On en déduit que E' est un Banach.

Proposition 27 : E est un espace de Banach si et seulement si toute suite absolument convergente est convergente.

Proposition 28 : Soit E un Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors $Id - u$ est inversible, son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

2.2 Théorème de Baire et conséquences

Théorème (de Baire V1) 29 : Dans un espace métrique complet X , la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vide est encore d'intérieur vide, ie si $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fermé dénombrable de X , alors si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n$ a un point intérieur ($\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$), alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{\phi_N} \neq \emptyset$.

Théorème (de Baire V2) 30 : Si X est un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X .

Application 31 : Tout espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

Théorème (Banach-Steinhaus) 32 : Soit E et F deux espace de Banach et soit $T_i : E \rightarrow F$ des applications linéaires continues ($i \in I$, ensemble d'indices quelconque) telle que pour tout $x \in E$, $C_x = \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < +\infty$. Alors $C = \sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$.

Application 33 : Il existe des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont intégrables, mais dont la série de Fourier ne converge pas pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Théorème (de l'application ouverte) 34 : Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, c) \subseteq T[B_E(0, 1)]$. En conséquence T est une application ouverte.

Théorème (isomorphisme de Banach) 35 : Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est automatiquement continue; T est un isomorphisme.

Théorème (du graphe fermé) 36 : Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si le graphe de T $G_T = \{(x, T(x)) \in E \times F; x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

2.3 Un cas particulier : les espaces L^p et transformée de Fourier

Théorème (Riesz-Fisher) 37 : Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (complet pour la norme $\|\cdot\|_p$). De plus, toute suite qui converge dans L^p admet une sous suite qui converge μ -p.p.

Proposition 38 : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$.

Définition 39 : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant les deux propriétés suivantes

- i) f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
 ii) f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Autrement dit pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Exemple 40 : La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 41 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Théorème (prolongement application uniformément continues) 42 : Soient E et F deux espaces métriques tels que F est complet. Soient A une partie dense de E et $f : A \mapsto F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $g : E \mapsto F$ qui prolonge f i.e $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. De plus l'application g est uniformément continue.

Développement (Théorème de Plancherel) 43 : Avec la convention de transformée de Fourier $e^{-ix\xi}$, L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

possède un unique prolongement continue à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et ce prolongement est un isomorphisme isométrique.

Remarque 44 : Dans beaucoup d'autre référence, on montre ce prolongement en partant de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cela se passe bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le théorème 41.

Remarque 45 : Par abus de notation, on note encore $\mathcal{F}(f)$ ce prolongement qui définit alors la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Il faut donc faire attention à distinguer la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, mais qui coïncident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

3 Espace de Hilbert

Définition 46 : Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme issue du produit scalaire.

Exemple 47 : Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert car la norme $\|\cdot\|_2$ dans L^2 est la norme associée au produit scalaire usuel.

Développement 48 : Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé (non vide) de H un espace de Hilbert. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $y \in \mathcal{C}$, tel que $d(x, \mathcal{C}) = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\| = \|x - y\|$ et on appelle le point $y = p_{\mathcal{C}}(x)$ le projeté orthogonale de x sur $\mathcal{C}$. On a ainsi

$$\forall z \in \mathcal{C}, \quad \|x - p_{\mathcal{C}}(x)\| \leq \|x - z\|.$$

Il vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathcal{C}, \operatorname{Re} \langle p_{\mathcal{C}}(x) - x, p_{\mathcal{C}}(x) - z \rangle \leq 0$.
- l'application p est 1-lip.

Application (Théorème de représentation de Riesz) 49 : Soit f une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que, pour tout x de H , $f(x) = \langle a, x \rangle$.

Théorème 50 : Si F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H , alors l'application $p_F : H \rightarrow F$ est une application linéaire continue, et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Dev 1 Théorème 51 : Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout sous-espace vectoriel fermé F , on a $H = F \oplus F^\perp$ et la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ associé est p_F . Elle est donc continue. On dit que p_F est la projection orthogonale sur F .

Corollaire 52 : Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H . Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Application 53 : L'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 54 : On appelle opérateur sur H toute application linéaire continue $T : H \rightarrow H$.

Proposition 55 : Soit H un espace de Hilbert. Pour tout opérateur T de H , il existe un autre opérateur, noté T^* , et appelé l'adjoint de T , tel que pour tout x, y de H , $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. De plus, $\|T\| = \|T^*\|$.

Remarque 56 : Cela se déduit du théorème de représentation de Riesz.

Références :

1. Analyse Gourdon

2. Cours d'analyse fonctionnelle Daniel Li
3. isenmann (rip)
4. oraux X-ENS analyse 3
5. Objectif agrégation Beck.