

On se place sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, le plus souvent égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Sous-espaces stables et réduction:

1°) Sous-espaces stables

Définition 1: Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u si $u(F) \subseteq F$.

Exemple 2: Le noyau et l'image de u sont stables par u .

Lemme 3: Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Alors le noyau et l'image de u sont stables par v .

Exemple 4: En appliquant le lemme précédent à u et $P(u)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$, on trouve que les espaces propres de u sont stables par u .

2°) Valeurs propres et polynômes caractéristique

Définition 5: On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. x est alors un vecteur propre de λ .

Définition 6: L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$ est le sous-espace propre de u pour λ .

Définition 7: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Proposition 8: λ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $P_u(\lambda) = 0$.

Théorème 9 (Cayley-Hamilton): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $P_u(u) = 0$.

3°) Critère de diagonalisation et trigonalisation.

Proposition 10: Si P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, alors u est diagonalisable.

Théorème 11: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) u est diagonalisable
- (ii) P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ de P_u d'ordre de multiplicité h_λ , $h_\lambda = \dim E_\lambda$
- (iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de u vérifiant $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$.

Proposition 12: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Théorème 13: $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique P_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Théorème 14: Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent et sont diagonalisables (respectivement trigonalisables), alors f et g sont diagonalisables (respectivement trigonalisables) dans une base commune.

II - Polynômes d'endomorphismes et endomorphismes nilpotents

1° Polynômes annulateur, minimal et décomposition de Jordan

Définition 15: Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k x^k \in K[x]$. On définit alors l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k$. On note $K(u)$ l'ensemble de ces endomorphismes, qui est une algèbre commutative.

Définition/Remarque 16: On appelle polynôme annulateur de u un polynôme $P \in K[x]$ telle que $P(u) = 0$. Soit alors $I_u = \{P \in K[x], P(u) = 0\}$. Comme cet ensemble est un idéal de $K[x]$ et que K un corps, alors cet idéal est engendré par un élément, que l'on note π_u , le polynôme minimal unitaire de u .

Remarque 17: Le théorème de Cayley-Hamilton nous permet de dire que $\pi_u \mid P_u$.

Théorème 18: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents:

- (i) u est diagonalisable
- (ii) il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples de u .

(iii) π_u est scindé à racines simples

Exemple 19: Les projecteurs sont annulés par le polynôme $x^2 - x$. Ils sont donc toujours diagonalisables et 2 valeurs propres dans $\{0, 1\}$.

Théorème 20 (Lemme des noyaux): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_n \in K[x]$, les P_i étant premiers entre eux.

Alors $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_n(u)$.

Si P est annulateur, alors $E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_n(u)$

Définition 21: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P_u(x) = (x - \lambda_1)^{a_1} \dots (x - \lambda_s)^{a_s}$. Alors le s.e.v $N_i = \ker (u - \lambda_i \text{Id})^{a_i}$ est le sous-espace caractéristique de u pour λ_i .

Théorème 22 (Décomposition de Jordan): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_u soit scindé sur K . Il existe un unique couple d'endomorphisme (d, n) tel que

(i) d est diagonalisable, n'est nilpotente

(ii) $u = d + n$ et d et n commutent

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Exemple 23: La décomposition de Jordan de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Application/Remarque 24: Le fait que d et n commutent est utile pour calculer plus facilement l'exponentielle d'une matrice en utilisant la décomposition de Jordan.

2° Endomorphismes nilpotents

Définition 25: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$.

Exemple 26: La dérivation $u: P \mapsto P'$ dans $\text{K}[X]$ est nilpotente.

Proposition 27: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents:

- (i) u est nilpotent
- (ii) $\chi_u = X^n$
- (iii) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_u = X^p$ (p est l'indice de nilpotence)
- (iv) u est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale.
- (v) u est trigonalisable de seule valeur propre 0.

Lemme 28: Soit $u \in \mathcal{L}(E^n)$. Alors u est nilpotent si et seulement si $\text{tr}(u^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Application 29 (Théorème de Burnside): Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall A \in G, A^N = I_n$. Alors G est fini.

Définition 30: on définit le bloc de Jordan la matrice suivante: $N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_m(\text{K})$ $m \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 31: Cette matrice est nilpotente d'indice m .

Développement 32 (Réduction des endomorphismes nilpotents): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors il existe $m_1 \geq \dots \geq m_s$ tel que u est semblable à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} N_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{m_s} \end{pmatrix} \quad \text{DEV 1}$$

Remarque 33: Comme un bloc de Jordan est cyclique, la réduction de Jordan et de Frobenius sont les mêmes.

III - Semi-simplicité et Cyclicité

1°) Endomorphisme semi-simple

Définition 34: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u .

Théorème 35: Si K est algébriquement clos, alors u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable.

Développement 36: u est semi-simple si et seulement si π_u est sans facteur carré. DEV 2

Théorème 37: Pour $\text{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(d, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est semi-simple, v nilpotent avec $d \circ v = v \circ d$ et $0 = d + v$.

2°) Endomorphismes cycliques

Définition 38: A un polynôme unitaire $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, on associe sa matrice compagnon $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\text{K})$ de sorte que $\chi_{C_P} = P$.

Définition 39: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

Proposition 40: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents:

- (i) u est cyclique
- (ii) $\chi_u = \pi_u$
- (iii) $\deg(\pi_u) = n$
- (iv) u est semblable à une matrice compagnon.

Théorème 41 (Réduction de Frobenius): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $P_1, P_2, \dots, P_r$ les facteurs de similitude de u tel que $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ avec $P_1 + P_2 + \dots + P_r = \pi_u$.