

Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie.

Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

RM
2022-2023

On se place dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Polynômes d'endomorphisme

1.1 L'algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$

Définition 1 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. On définit l'endomorphisme $P(u)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k$ avec $u^0 = \text{IDe}$ et $u^{k+1} = u \circ u^k$. On note alors $\mathbb{K}[u]$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes $v = P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u).$$

Remarque 2 : On peut définir de manière analogue $\mathbb{K}[A]$ avec A une matrice représentant u dans une base $\mathcal{B}$.

Remarque 3 : Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 , on a $\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n^2$.

1.2 Valeurs propres et polynômes caractéristiques

Définition 4 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u si il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. x est alors un vecteur propre de λ .

On appelle $E_\lambda = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ le sous-espace propre de u pour λ , qui est stable par u .

Définition 5 : On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $P_u(X) = \det(XI_n - A)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$.

Proposition 6 : λ est valeur propre de u si et seulement si $P_u(\lambda) = 0$.

1.3 Polynômes annulateurs, polynômes minimaux

Définition 7 : On dit qu'un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de u si $Q(u) = 0$. Comme la famille $\{u^k | 0 \leq k \leq n\}$ est liée car $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$, on a toujours l'existence d'un polynôme annulateur pour u en dimension finie.

Définition 8 : L'ensemble $I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(u) = 0\}$ est non vide et est le noyau du

morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$, c'est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Comme $\mathbb{K}[X]$ est principale, cet ensemble est engendré par un élément que l'on note π_u , appelé polynôme minimal de u .

Remarque 9 : π_u est donc le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u .

Exemple 10 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice $q \geq 1$ si et seulement si $\pi_u = X^q$.

Si u est un projecteur, alors $X^2 - X$ est un polynôme annulateur et est même minimale si u n'est ni nul ni l'identité.

Théorème 11 : Tout polynôme annulateur $P \in I_u$, les valeurs propres de u sont racine de P . Les valeurs propres de u sont exactement les racines du polynôme minimal.

Corollaire 12 : On en déduit que la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.

Théorème 13 : L'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension égale à $\deg(\pi_u)$.

Théorème 14 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $\mathbb{K}[u]$ est un corps.
- ii) $\mathbb{K}[u]$ est intègre.
- π_u est irréductible.

Théorème (Cayley-Hamilton) 15 : On a $P_u(u) = 0$. Autrement dit, le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur.

Corollaire 16 : Le polynôme minimal π_u divise le polynôme caractéristique P_u . On a donc $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) \leq n$.

Théorème (Lemme des noyaux) 17 : Soit $P = P_1 P_2 \dots P_p$ avec $P_i \in \mathbb{K}[X]$ pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ deux à deux premiers entre eux. Alors on a

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(P_k(u)).$$

et les projecteurs $\pi_k : \ker(P(u)) \rightarrow \ker(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$. Si P est annulateur, alors on a $E = \bigoplus_{k=1}^p \ker(P_k(u))$.

Proposition 18 : Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent, alors le noyau de u et l'image de v sont stables par u .

Corollaire 19 : Comme u et $P(u)$ commutent pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on en déduit que $\ker(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u . Ceci montre par exemple que E_λ est stable par u .

2 Application à la réduction d'endomorphisme

2.1 Diagonalisation, trigonalisation et décomposition de Jordan

Définition 20 : u est dit diagonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u dans cette base est diagonale.

u est dit trigonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ dans la quelle la matrice de u dans cette base est triangulaire (supérieur ou inférieure).

Remarque 21 : On a l'équivalence matriciel que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si A est semblable à une matrice diagonale (respectivement trigonalisable).

Théorème 22 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est diagonalisable.
- ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.
- iii) π_u est scindé à racines simples.
- iv) χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, la dimension de E_λ est égale à la multiplicité de λ dans χ_u .

Exemple 23 : Les projecteurs sont donc toujours diagonalisable car $X^2 - X$ est polynôme annulateur scindé à racines simples. Les symétrie aussi si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Application 24 : Si u est diagonalisable, alors la restriction de u à un sous-espace vectoriel F stable par u est encore diagonalisable.

Théorème 25 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est trigonalisable.
- ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé.
- iii) π_u est scindé.
- iv) χ_u est scindé.

Corollaire 26 : Si le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme est trigonalisable.

Exemple 27 : Tout les endomorphisme sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sont trigonalisable.

Théorème 28 : Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphisme de E telle que $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout $i, j \in I$ (c'est-à-dire que les f_i commutent deux à deux). Si tous les f_i sont diagonalisable (respectivement trigonalisable), on peut co-diagonaliser (respectivement co-trigonaliser) la famille $(f_i)_{i \in I}$: il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont diagonales (respectivement triangulaires).

Définition 29 : Supposons que le polynôme caractéristique de u soit scindé sur $\mathbb{K}$: $P_u(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_s)^{\alpha_s}$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1; s \rrbracket$, le sous espace vectoriel $N_i = \ker(f - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$ s'appelle le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i .

Remarque 30 : On déduit de la proposition 18 que N_i est stable par u .

Théorème (Décomposition de Jordan) 31 : Si le polynôme caractéristique de u est scindé, alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphisme tel que :

- i) d est diagonalisable et n est nilpotente.
- ii) $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Exemple 32 : La décomposition de Jordan de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Application 33 : On peut calculer plus facilement l'exponentielle d'une matrice grâce à la décomposition de Jordan. En effet, soit $u = d + n$ et $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale. Alors comme d et n commute, on a $\exp(u)_{\mathcal{B}} = \exp(d)_{\mathcal{B}} \exp(n)_{\mathcal{B}}$. Avec q l'indice de nilpotence de n et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

on obtient :

$$\exp(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\text{Mat}(n)_{\mathcal{B}}^k}{k!}.$$

Remarque 34 : Attention, il n'est pas pour autant facile de calculer l'exponentielle d'une matrice quelconque car il peut être difficile de trouver sa décomposition de Jordan.

Calculer les exponentielles de matrices est pratique dans la résolution des équations différentielles.

2.2 Réduction des endomorphisme nilpotents

Définition 35 : Un endomorphisme u est nilpotent si il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $u^s = 0$.

Exemple 36 : L'application dérivation $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotente.

Proposition 37 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) u est nilpotent.
- ii) $P_u(X) = X^n$.
- iii) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_u = X^p$.
- iv) u est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale.
- v) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est zéro.

Théorème 38 : Si $\text{car}(\mathbb{K})=0$, alors on a que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{tr}(u^k) = 0 \Leftrightarrow u$ est nilpotent.

Application (Théorème de Burnside) 39 : soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini. Alors G est fini.

Définition 40 : On appelle bloc de Jordan de taille $m \in \mathbb{N}^*$ la matrice suivante :

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

Remarque 41 : Cette matrice est nilpotente d'indice m .

Développement (Réduction des endomorphismes nilpotents) 42

: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, avec comme indice de nilpotence m .

Alors E se décompose en somme de sous-espaces cycliques et il existe $m_1 \geq \dots \geq m_s$ tels que u est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} N_{m_1} & & \\ & N_{m_2} & \\ & & \ddots \\ & & & N_{m_s} \end{pmatrix}$$

Corollaire (Réduction de Jordan) 43 : Si P_u est scindé, on en déduit la réduction de jordan en trigonalisant u et on le scinde en une matrice diagonale et une matrice nilpotente. D'après la réduction précédente, on obtient celle de jordan.

3 Endomorphismes semi-simple et cycliques

3.1 Endomorphisme semi-simple

Définition 44 : On dit que u est semi-simple si pour tout sous-espace F de E stable par u , il existe un supplémentaire de F stable par u .

Théorème 45 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable.

Développement 46 : u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est sans facteur carré dans sa décomposition en irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Dev 2

Exemple 47 : Un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais semi-simple, car son polynôme minimal n'est pas sans facteur carré.

Remarque 48 : D'après la remarque 45, la caractérisation de semi simplicité n'est vraiment utile que dans des corps non algébriquement clos.

Théorème (Décomposition de Dunford généralisé) 49 : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension fini $m \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique couple (s, n) tel que s est un endomorphisme semi-simple et n nilpotent, avec $u = s + n$ et $s \circ n = n \circ s$.

3.2 Endomorphisme cyclique

Définition 50 : On associe au polynôme unitaire $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ la matrice compagnon définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition 51 : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

Proposition 52 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) u est cyclique.
- ii) $P_u = \pi_u$.
- iii) π_u est de degré n .
- iv) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.

Dev 1

Théorème (Réduction de Frobenius) 53 : Soit $P_1, \dots, P_r$ la suite des invariants de similitude de u , alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{P_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathcal{C}_{P_r} \end{pmatrix}.$$

On a aussi $\pi_u = P_1$ et $P_u = P_1 \dots P_r$.

Références :

1. Algèbre Gourdon
2. Objectif agrégation Beck
3. Algèbre et Géométrie Rombaldi
4. isenmann (rip)
5. Algèbre linéaire Grifone