Leçon 148 : Exemples de décomposition de matrices. Applications

RM
2022-2023

1 Décomposition par la réduction. Similitude et équivalence.

1.1 Similitude et équivalence

Dans cette partie on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Exemple 1 : La structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fournis un premier exemple de décomposition de matrice. Avec$(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique, on a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A = \alpha_1 E_{1,1} + ... + \alpha_{n^2} E_{n,n}$$

Définition 2 : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale tel que $A = PDP^{-1}$.
Elle est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieur, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieur tel que $A = PTP^{-1}$.

Théorème 3 : Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est trigonalisable. Si il est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

Remarque 4 : Les matrices semblables ne nous donnent pas une décomposition unique, mais l'action de conjugaison nous permet de nous ramener à une matrice intéressante dans l'orbite d'une matrice A.

1.2 Exemples de réduction

Théorème (Décomposition de Jordan) 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (D, N) de matrices tell que $A = D + N$ où D est diagonalisable est N est nilpotent, avec D et N qui commute.

Exemple 6 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à pour décomposition de Jordan $A = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ à pour décomposition de Jordan $A = A + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car A est diagonalisable.

Application 7 : Cela est très pratique pour calculer l'exponentielle d'une matrice. En effet, dans une base B ou D est diagonale, on a

$$exp(A) = exp(D+N) = exp(D)exp(N) = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n} \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{d(N)-1} \frac{N^i}{i!}$$

Théorème (Réduction de Jordan) 8 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_M(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j)$$

Alors M est semblable à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}, \text{ où } \forall i, A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & (0) \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & v_{i,\alpha_i - 1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$$

avec pour tout $(i, j), v_{i,j} \in \{0, 1\}$.

Remarque 9 : A_i correspond à une valeur propre λ_i, est composé de $dimE_{\lambda_i}$ bloc de jordan, la somme de la taille des blocs est égale à α_i et l'ordre du plus grand bloc est m_i, la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal.

Exemple 10 : Si $dimE = 5, \chi_M(X) = -(X - \lambda)^5, \mu_M(X) = (X - \lambda)^3$ et $dimE_\lambda = 3$, alors M est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème (Réduction de frobenius) admis 11 : Si $P_1, ..., P_r$ tels que $P_{i+1}|P_i$ la suite des invariants de similitude de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors M est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$

où C_{P_i} la matrice compagnon associé au polynôme P_i. On a de plus $\mu_M = P_1$ et $P_1 ... P_r$ est le polynôme caractéristique de M.

2 Décomposition multiplicative

On se place dans $\mathbb{R}^n$ munie du produit scalaire canonique.

Théorème (Spectral) 12 : Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que PA^tP soit diagonale.

Application 13 : Soit $\|.\|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ induite par la norme $\|.\|_2$ de $\mathbb{R}^n$. Alors pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \sqrt{\rho(^tAA)}$.

Définition 14 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (définie positive) si elle est symétrique avec $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ ($\langle x, Ax\rangle > 0$ pour x non nul).

Développement 15 : L'application

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ & (O,S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Dev 1

Application 16 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est égale à la boule unité $B(0,1)$, définie par $B(0,1) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |||A|||_2 \leq 1\}$.

Application 17 : Le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème (Décomposition QR) 18 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice O orthogonale et une matrice triangulaire supérieur R telles que

$$A = QR$$

De plus, on peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de la matrice R soient positifs. Si A est inversible, alors cette décomposition est unique.

Corollaire (Décomposition d'Iwasawa) 19 : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QDR$ où Q est une matrice orthogonale, D une matrice diagonale de coefficients diagonaux strictement positifs et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

Développement 20 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que ses valeurs propres sont de modules distincts classé de sorte que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n| > 0$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et P^{-1} possède une factorisation LU. Alors la suite $(A_k)_{k\geq 1}$ construite de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = A \\ A_{k+1} = R_kQ_k \ \text{ où } \ A_k = Q_kR_k \ \text{ est la décomposition } QR \text{ de } A_k \end{array}\right. .$$

Dev 2

est telle que

$$\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i, \quad 1 \leq \lambda_i \leq n$$

$$\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,j} = 0, \quad 1 \leq j < i \leq n$$

Remarque 21 : Cette méthode permet de calculer les valeurs propres d'une matrice "quelconque". De plus, si la matrice A est réelle, l'hypothèse selon laquelle ses valeurs propres sont toutes de modules différents entraîne qu'elles sont toutes réelles.

3 Décomposition algorithmique. Application à la résolution de système linéaire

3.1 Méthodes directes

Théorème (Décomposition LU) 22 : Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice dont toutes les sous matrices

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

sont inversibles. Il existe alors un unique couple (L,U) avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1 tel que $A = LU$.

Théorème (Décomposition de Choleski) 23 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice B de taille n, triangulaire inférieur telle que $A = B^tB$, et une unique à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = B^tB$.

Remarque/Application 24 : La décomposition de Choleski est pratique pour résoudre un système linéaire $AX = D$ si A est symétrique définie positive, on résout alors pour $A = B^tB$,

$$BC = D \ \text{ et } \ ^tBX = C$$

Elle est meilleur dans ce cas que la méthode du pivot de Gauss.

3.2 Méthodes itératives

On cherches ici des méthodes itératives pour résoudre $Au = b$, où A est inversible et b un vecteur.

Définition (Méthode itérative) 25 : Supposons qu'on puisse trouvé une matrice B et un vecteur c tels que $I - B$ soit inversible, et que les solutions de $u = Bu + c$ soit également solutions du problème de départ. On se donne alors u_0 un vecteur initial, et on pose $(u_k)_{k\geq 0}$ tel que

$$u_{k+1} = Bu_k + c$$

On dit alors que la méthode itérative est convergente si (u_k) converge pour tout u_0 vers u, qui est solution de $Au = b$. La matrice B est appelée matrice de la méthode itérative.

Proposition 26 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) la méthode itérative est convergente.
2) $\rho(B) < 1$.
3) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle $\|.\|$.

Application 27 : Supposons que l'on peut décomposer A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible et "facile à inverser" de tels sorte qu'il est facile de résoudre $Mu = b$ (diagonale ou triangulaire). Alors

$$Au = b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b.$$

Avec $B = M^{-1}N = I - M^{-1}A$, on a alors que $I - B = M^{-1}A$ est inversible et en utilisant la méthode itérative avec donc $u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$, cela revient à résoudre les systèmes linéaires successifs :

$$Mu_{k+1} = Nu_k + b, k \geq 0$$

Remarque 28 : Cette méthode est la composantes principale des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et méthode itérative de relaxation, 3 variantes pour résoudre le problème de départ $Au = b$.

Remarque 29 : Les trois méthodes ont une complexité en $O(n^2)$.

Proposition 30 : En décomposant la matrice A de la forme $A = D - E - F$ (voir ciarlet, trop relou de faire la matrice) on peut résumer les méthodes dans le tableau suivant

3.3 Forme normal de Smith

Définition 31 : Soit A un anneau. Un système complet de représentants irréductibles(s.r.c.i) est un sous ensemble $\mathscr{P}$ de A tel que :

1) tout élément de $\mathscr{P}$ est irréductible.
2) tout élément irréductible de A est associé à un unique élément de $\mathscr{P}$.

Remarque 32 : Cela revient à munir l'ensemble des irréductibles de A la relation d'équivalence "êtres associés", et de prendre un représentant dans chaque classe d'équivalence.

Théorème (Réduction des matrices) 33 : Soit A un anneau euclidien, et soit $\mathscr{P}$ un s.c.r.i de A. Toute matrice $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(A)$ est équivalente à une matrice de la forme

$$E(a_1, ..., a_r) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_r & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a_1, ..., a_r \in A$ non nuls et normalisés vérifiant

$$a_1 | a_2 | ... | a_r$$

De plus, l'entier r et les éléments $a_1, ..., a_r$ sont uniques.
Plus précisément, il existe des matrices $U \in GL_m(A)$ et $V \in GL_n(A)$ qui sont produits de matrices de permutation, de transvection et de dilatation telles que $UCV = E(a_1, ..., a_r)$.

Définition 34 : Soit A un anneau euclidien, soit $\mathscr{P}$ un s.c.r.i de A et soit $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(A)$. La matrice $E(a_1, ..., a_r)$ donnée par le théorème précédent s'appelle la forme normal de Smith de C (par rapport à $\mathscr{P}$).

Exemple 35 : Soit $A = \mathbb{Z}$ et $C = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Alors $C \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ avec donc $r = 2, a_1 = 1$ et $a_2 = 14$.

Remarque/Application 36 : La forme normal de Smith est très utile pour résoudre des systèmes linéaires à coefficients dans un anneau euclidien.

Application (Théorème de structure des groupes abéliens de type fini) 37 : Soit G un groupe abélien de type fini. Alors il existe un entier $r \geq 0$ et des entiers $d_1, ..., d_s \leq 2$ vérifiant $d_s | ... | d_2 | d_1$ tel que

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$$

De plus, l'entier r et la suite d'entiers $(d_1, ..., d_s)$ est unique, et ne dépends que de la classe d'isomorphisme de G.

Théorème 38 : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire sous la forme $A = PJ_rQ$ où $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Références :

1. Algèbre et géométrie - Rombaldi
2. Algèbre - Gourdon
3. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation - Ciarlet
4. Algèbre linéaire - Joseph Grifone
5. Algèbre : le grand combat - Grégoty Berhuy
6. H2G2 tome 1 - Caldero