Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

1 Théorèmes de Weierstraß et de Stone-Weierstraß

1.1 Théorème de Weierstraß et conséquences

Théorème 1. [Gou] (théorème de Bernstein) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$B_n : x \in [0,1] \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

La suite de fonctions polynomiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Corollaire 2. [Gou] (théorème de Weierstrass) Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorème 3. [Gou, Problème 22] (théorème taubérien fort) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant 1$, et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0.$$

Alors, la série $\sum a_n$ converge, et sa somme est nulle.

1.2 Généralisation : le théorème de Stone-Weierstraß

Définition 4. Soit X un espace métrique compact. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $C^{\mathbb{K}}(X)$ l'espace des fonctions continues de X vers $\mathbb{K}$, muni de la norme uniforme

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Définition 5. [HL] Soit A une sous-algèbre de $C^{\mathbb{K}}(X)$. A est dite

— *séparante* si pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe $h \in A$ telle que $h(x) \neq h(y)$,

— *auto-conjuguée* si pour toute $h \in A$, on a $\overline{h} \in A$.

Théorème 6. [HL] (Stone-Weierstrass) Toute sous-algèbre de $C^{\mathbb{K}}(X)$ séparante, auto-conjuguée, et contenant les fonctions constantes, est dense dans $C^{\mathbb{K}}(X)$.

Exemple 7. [HL] L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{C}$ est dense dans $C^{\mathbb{C}}(X)$.

Remarque 8. On retrouve le théorème de Weierstraß, ainsi que le théorème de Fejér qui sera énoncé plus loin.

2 Convolution et régularisation

2.1 Translations

Définition 9. [Ela] (translation) Fixons $p \in [1,+\infty]$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, la *translation par a* sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ est l'application

$$\begin{array}{rcccl} \tau_a & : & L^p(\mathbb{R}^d) & \to & L^p(\mathbb{R}^d) \\ & & f & \mapsto & f(\cdot - a). \end{array}$$

Lemme 10. L'ensemble $\mathrm{Et}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions étagées à support compact est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$.

Proposition 11. [Ela] (continuité des translations) Si $p < +\infty$, pour toute fonction $f \in L^p$, on a $\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$.

Remarque 12. [Ela] Le résultat est faux pour $p = +\infty$: considérer par exemple l'indicatrice d'un intervalle borné.

2.2 Produit de convolution

Définition 13. [HL] (produit de convolution) Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mesurables. Lorsque cela est bien défini, on appelle *convolée* de f et g la fonction

$$f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit alors que f et g sont *convolables*.

Proposition 14. [HL] Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec p, q exposants conjugués. Alors, $f * g$ définit une fonction uniformément continue, bornée, et

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 15. [HL] (inégalité de Young) Soient $p, q, r \in [1,+\infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors, le *produit de convolution*

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$$

et $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 16. [HL] (support) Si f et g sont convolables, alors

$$\mathrm{Supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)}.$$

Proposition 17. [Bré] Si $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$ avec $k \geqslant 1$, et si $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leqslant k, \partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g.$$

2.3 Approximations de l'unité

Définition 18. [Bré] On appelle *approximation de l'unité* toute suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \geqslant 0$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$
3. $\forall \delta \geqslant 0$,
$$\int_{\|x\|\geqslant\delta} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exemple 19. [Bré] Fixons $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ à support dans $\overline{B}(0,1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\rho_n : x \mapsto n^d \rho(nx)$. Alors, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Proposition 20. [Bré] Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ uniformément continue bornée (resp. L^p), et soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors, $(f * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. dans L^p) vers f.

Corollaire 21. [Ela] La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est injective.

Corollaire 22. [Bré] $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Corollaire 23. [Bré] Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

alors $f = 0$.

3 Bases hilbertiennes de fonctions régulières

3.1 Polynômes trigonométriques

On se place dans $L^2_{2\pi} = L^2([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 24. [Ela] Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $e_n : x \mapsto e^{inx}$. L'espace des polynômes trigonométriques $\mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2)$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Définition 25. [Ela] Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le $n^{\text{ème}}$ *coefficient de Fourier* de f est

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 26. Si $f \in L^2_{2\pi}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

Proposition 27. [Ela] (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1_{2\pi}$, $c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.

Définition 28. [Ela] Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit la $N^{\text{ème}}$ somme partielle de la série de Fourier de f comme

$$S_N f = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n.$$

Théorème 29. [Ela] (Parseval) Soit $f \in L^2_{2\pi}$. On a

$$\|S_n f - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

et

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Théorème 30. [Ela] $f \in C^0_{2\pi}$ est C^1 par morceaux, $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f.

Théorème 31. [Ber] (Équation de la chaleur) Soit $u_0 : [0, L] \to \mathbb{R}$ continue, C^1 sur $]0, L[$, telle que $u_0(0) = u_0(L) = 0$. Alors, le problème

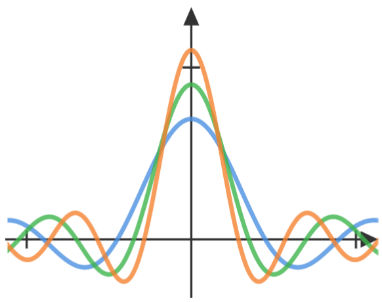
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \text{ sur } Q = \mathbb{R}_+^* \times]0, L[, \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, L) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ sur } [0, L]. \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$, où $\overline{Q} = \mathbb{R}_+ \times [0, L]$. On a même $u \in C^\infty(Q)$.

3.2 Noyaux trigonométriques

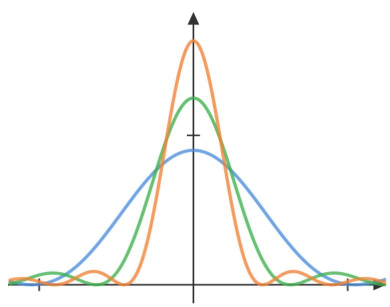
Définition 32. [Ela] (noyau de Dirichlet) Pour $N \in \mathbb{N}$, le $N^{\text{ème}}$ *noyau de Dirichlet* est

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n.$$



Définition 33. [Ela] (noyau de Féjer) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, le $N^{\text{ème}}$ *noyau de Féjer* est

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n.$$



Proposition 34. [Ela] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$.

Proposition 35. [Ela] $(F_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

Définition 36. (sommes de Fejér) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, la $N^{\text{ème}}$ *somme de Fejér* de $f \in L^1_{2\pi}$ est

$$\sigma_N f = F_N * f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n.$$

Théorème 37. [Ela] (théorème de Féjer)

1. Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Alors, $\sigma_n f \in C^0_{2\pi}$ avec $\|\sigma_n f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, et $\|\sigma_n f - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
2. Soit $f \in L^p_{2\pi}, 1 \leqslant p < \infty$. Alors, $\sigma_n f \in L^p_{2\pi}$ avec $\|\sigma_n f\|_p \leqslant \|f\|_p$, et $\|\sigma_n f - f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Corollaire 38. [Ela] Soient $f \in C^0_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $S_N f(x_0) \xrightarrow[N \to \infty]{} \ell$, alors $\ell = f(x_0)$.
2. Si $f, g \in C^0_{2\pi}$ (resp. $L^1_{2\pi}$) vérifient

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g),$$

alors $f = g$ dans $C^0_{2\pi}$ (resp. $L^1_{2\pi}$).

3.3 Polynômes et fonctions de Hermite

Proposition 39. [Ela] Soit $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$. L'espace

$$L^2_\omega = \left\{ f \text{ mesurable}, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \omega(x) \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert.

Définition 40. [Ela] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Hermite* est

$$H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} D^n \left(e^{-x^2}\right)$$

où $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Proposition 41. [Ela]

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = (2x - D)H_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $DH_n = nH_{n-1}$.

Proposition 42. [Ela] $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et totale dans L^2_ω.

Proposition 43. [Hilb] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \mapsto e^{-x^2/2}H_n(x)$ la $n^{\text{ème}}$ *fonction de Hermite*. Alors,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-D^2 + x^2)h_n = (2n+1)h_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(h_n) = (-i)^n\sqrt{2\pi}h_n$.

Ainsi, les h_n diagonalisent l'opérateur associé à l'oscillateur harmonique quantique 1D, et la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarques

— On peut évoquer le théorème de Müntz... mais il est assez exotique, et pas vraiment utile en pratique.

— Il faut bien expliquer pourquoi on définit les approximations de l'unité (absence d'élément neutre dans L^1 muni de $*$).

— Expliquer pourquoi on introduit le noyau de Fejér (problème de convergence ponctuelle avec les séries de Fourier).

Références

[Ber] Florent Berthelin, *Équations différentielles*, Cassini, 2017.

[Bré] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 2005.

[Ela] Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, ellipses, 2008.

[Gou] Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, 3ème édition, ellipses, 2020.

[Hilb] Laurent Schwartz, *Analyse hilbertienne*, Hermann, 1979.

[HL] Francis Hirsch, Gilles Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 2009.