Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Prérequis : notions d'espace affine et d'application affine.
Sauf mention contraire, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine réel de dimension finie.

1 Barycentres

1.1 Barycentre, isobarycentre

Définition 1. [Com] (point pondéré) On appelle *point pondéré* tout couple $(A, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$.

Proposition 2. [Com, page 133] (barycentre) Soient $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)$ des points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$. Il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0,$$

appelé *barycentre* des (A_i, λ_i), et noté $bar((A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k})$.

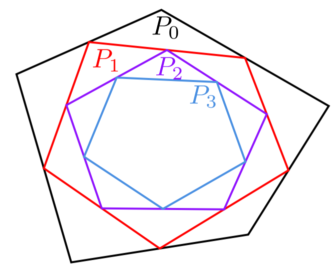
Remarque 3. [Com, page 133] Le barycentre de $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)$ est inchangé si l'on multiplie tous les λ_i par un réel non nul. On peut donc supposer, si on le souhaite, que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Exemple 4. [Com, page 134] Si $A, B \in \mathcal{E}$, on appelle *segment* $[AB]$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points A et B.

Définition 5. [Com, page 133] Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_k \neq 0$, on parle d'*isobarycentre*.

Exemple 6. [Com, page 134] Si $A, B \in \mathcal{E}$, l'isobarycentre des points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

Proposition 7. (suite de polygones) Fixons P_0 un polygone à N sommets, $N \geqslant 3$, et construisons par récurrence la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que P_{k+1} ait pour sommets les milieux des côtés de P_k. Alors, si l'on identifie P_k avec ses sommets $\left(z_1^{(k)}, \dots, z_N^{(k)}\right) \in \mathbb{C}^N$, la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $(g, \dots, g)$, où g est l'isobarycentre des P_k.



Proposition 8. [Com, page 134] (associativité) Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés de $\mathcal{E}$ telle que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$. Soit $I = \bigsqcup_{p=1}^{s} I_p$ une partition de I telle que pour tout $1 \leqslant p \leqslant s$, $\mu_p := \sum_{i \in I_p} \lambda_i \neq 0$. Alors, si l'on note $G_p = bar((A_i, \lambda_i)_{i \in I_p})$, on a

$$bar((A_i, \lambda_i)_{i \in I}) = bar((G_p, \mu_p)_{1 \leqslant p \leqslant s}).$$

Exemple 9. [Com, page 134] On se place dans un plan affine. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes, et le point de concours est l'isobarycentre des trois sommets, appelé *centre de gravité* du triangle. Il est situé aux deux tiers de chaque médiane, en partant du sommet.

1.2 Coordonnées barycentriques

On rappelle que, sauf mention contraire, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine réel de dimension finie n.

Définition 10. (coordonnées barycentriques) On dit que $(A_0, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ forment un *repère affine* de $\mathcal{E}$ si pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, appelés *coordonnées barycentriques* de M dans $(A_0, \dots, A_n)$, tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ et $M = bar((A_i, \lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n})$.

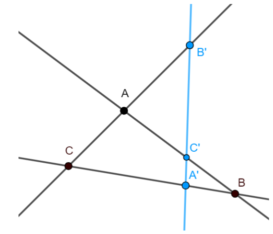
Remarque 11. On peut imposer seulement $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \neq 0$, auquel cas les λ_i sont définis à multiplication par un même réel non nul près. Dans la suite, c'est la condition qu'on utilisera, tout en conservant l'appellation (abusive) "*les* coordonnées barycentriques".

Proposition 12. [Com, page 137] $(A_0, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ forment un repère affine de $\mathcal{E}$ si $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ forme une base de l'espace vectoriel E.

Proposition 13. [Com, page 141] Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Des points $P_0, \dots, P_n \in \mathcal{E}$ sont affinement liés (c'est-à-dire que la famille $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ est liée) si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées barycentriques est nul.

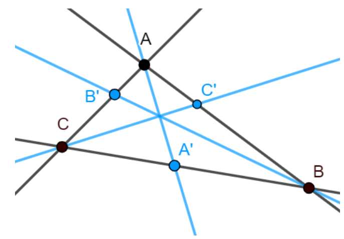
Théorème 14. [TauG] (théorème de Ménélaüs) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, et soit ABC un triangle non aplati de $\mathcal{E}$. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ tous distincts des sommets. Alors, A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$



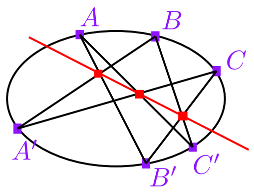
Théorème 15. [TauG] (théorème de Céva) Sous les mêmes hypothèses, $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$



Théorème 16. [Eid, page 52] Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Par 5 points distincts $A, B, C, D, E \in \mathcal{E}$ dont quatre quelconques ne sont pas alignés passe une unique conique $\mathscr{C}$, non dégénérée si et seulement si trois quelconques des 5 points ne sont pas alignés.

Théorème 17. [Eid, page 90] (théorème de Pascal) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soient $A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{E}$ distincts avec A, B, C non alignés. Alors, il existe une conique passant par ces six points si et seulement si les points $P := (BC') \cap (CB')$, $Q := (CA') \cap (AC')$ et $R := (AB') \cap (BA')$, que l'on suppose bien définis, sont alignés.



1.3 Cas d'un triangle dans un plan euclidien

Dans cette section, $\mathcal{E}$ désigne un plan euclidien, et ABC un triangle non aplati de $\mathcal{E}$. On se place dans le repère barycentrique (A, B, C).

Définition 18. (aire algébrique) Soit $M \notin (AB) \cup (BC) \cup (CA)$. On définit l'*aire algébrique* du triangle MBC comme

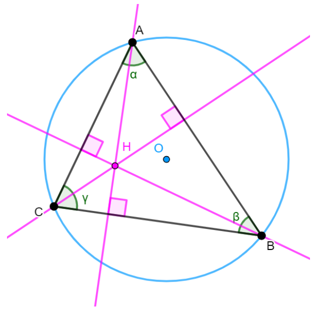
$$\mathcal{A}(MBC) = \frac{1}{2} \det\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right).$$

Proposition 19. [Com] (coordonnées barycentriques et aires) Soit $M \notin (AB) \cup (BC) \cup (CA)$. Les coordonnées barycentriques de M sont $(\mathcal{A}(MBC), \mathcal{A}(MCA), \mathcal{A}(MAB))$.

Proposition 20. [TauG] (centre du cercle inscrit) Les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit dans ABC sont (BC, CA, AB).

Proposition 21. [TauG] (centre du cercle circonscrit) Les coordonnées barycentriques du centre O du cercle circonscrit à ABC sont $(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$, où α, β, γ sont les mesures des angles du triangle en A, B, C respectivement.

Proposition 22. [TauG] (orthocentre) Les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H de ABC sont $(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$.



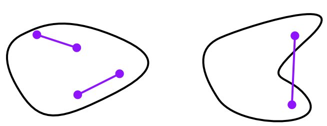
2 Convexité

2.1 Parties convexes

Définition 23. [Com, page 142] (partie convexe) Soit C une partie de $\mathcal{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Le barycentre de toute famille finie de points pondérés de C $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k)\}$ vérifiant $\forall i, A_i \in C, \lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, est un élément de C.
2. Pour tous $M, N \in C$, le segment $[MN]$ est inclus dans C.

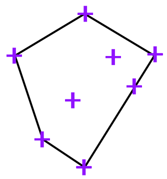
On dit alors que C est une partie *convexe* de $\mathcal{E}$.



Proposition 24. [Com, page 142] Toute intersection de parties convexes de $\mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$.

2.2 Enveloppe convexe et points extrémaux

Définition 25. [Com, page 143] (enveloppe convexe) Soit $X \subset \mathcal{E}$ non vide. On appelle *enveloppe convexe* de X, et on note $conv(X)$, la plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ contenant X.



Proposition 26. [Com, page 143]

$$conv(X) = \left\{ bar((A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}), k \in \mathbb{N}^*, A_i \in X, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Exemple 27. [Com, page 143]

1. L'enveloppe convexe de deux points $A, B \in \mathcal{E}$ distincts est le segment $[AB]$.
2. Si $\mathcal{E}$ est un plan affine dont (A, B, C) est un repère affine, alors $conv(\{A, B, C\})$ est le triangle ABC (bord compris).

Théorème 28. [Com, page 148] (théorème de Gauss-Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geqslant 2$. Alors, l'ensemble $R_{P'}$ des racines de P' est contenu dans l'enveloppe convexe de l'ensemble R_P des racines de P, et les barycentres des points de R_P et $R_{P'}$ (où chaque racine est affectée du poids correspondant à sa multiplicité) coïncident.

Théorème 29. [TauG, page 52] (théorème de Carathéodory) Soit $X \subset \mathcal{E}$ non vide, où $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension n. Alors, tout point de $conv(X)$ s'écrit comme barycentre à coefficients positifs de $n+1$ points de X.

Corollaire 30. [TauG, page 52] Si X est compacte, alors $conv(X)$ est compacte.

Définition 31. [Com, page 143] (point extrémal) Soit $C \subset \mathcal{E}$ convexe, et soit $P \in C$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M, N \in C, P = bar((M, \frac{1}{2}), (N, \frac{1}{2})) \Rightarrow M = N = P$.
2. $\forall M, N \in C, P \in [MN] \Rightarrow M = N = P$.
3. Le complémentaire de $\{P\}$ dans C est convexe.

On dit alors que P est un *point extrémal* de C.

Théorème 32. [FGN An3] (théorème de Krein-Milman) Tout compact convexe de $\mathcal{E}$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Proposition 33. [Com] Les points extrémaux d'un polyèdre convexe sont ses sommets.

2.3 Séparation de convexes

Définition 34. [Bré, page 4] (hyperplan affine) Un *hyperplan affine* est un ensemble de la forme

$$H = \{M \in \mathcal{E}, f(M) = 0\}$$

où $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une forme affine non constante.

Définition 35. [Bré] (jauge d'un convexe) Soit $C \subset E$ un convexe ouvert contenant 0. La *jauge* de C est l'application $p : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \inf\{\alpha > 0, \alpha^{-1} x \in C\}.$$

Lemme 36. [Bré] $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$.

Théorème 37. [Bré] (Hahn-Banach analytique) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

1. $\forall \lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
2. $\forall x, y \in E, p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel, et soit $g : G \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in G, g(x) \leqslant p(x).$$

Alors, il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E, f(x) \leqslant p(x).$$

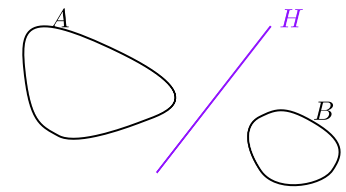
Lemme 38. [Bré] Soit C un convexe ouvert non vide. Pour tout point $x_0 \notin C$, il existe une forme linéaire f non nulle telle que

$$\forall z \in C, f(z) < f(x_0).$$

En particulier, l'hyperplan $\{f(x) = f(x_0)\}$ sépare C et $\{x_0\}$.

Théorème 39. [Bré] (Hahn-Banach géométrique) Soient $A, B \subset E$ convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors, il existe un hyperplan H séparant A et B au sens large.

Corollaire 40. [Bré] Soient $A, B \subset E$ convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan H séparant A et B au sens strict.



Remarques

— [Com] Soit $C \subset \mathcal{E}$ convexe. On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est *convexe* si pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$f(bar(M,\lambda),(N,1-\lambda)) \leqslant \lambda f(M) + (1-\lambda) f(N).$$

C'est équivalent à dire que $\{(M,t), f(M) \leqslant t\}$ est une partie convexe de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$.

— Il faut avoir conscience que les polyèdres admettent différentes définitions dont l'équivalence n'est pas immédiate, et que la notion de sommet, bien qu'intuitive, n'est pas évidente à définir. Il est judicieux d'être préparé à d'éventuelles questions du jury. Pour cela, voir le cours de Daniel Perrin (page web) et/ou le livre de Marcel Berger, *Géométrie*, tome 2.

— Le théorème de Hahn-Banach analytique est vrai lorsque E est de dimension infinie, et se démontre alors grâce au lemme de Zorn. Dans ce cas, il faut remplacer "hyperplan" par "hyperplan fermé" dans la version géométrique. Lorsque E est un espace de Hilbert, le résultat 40 se démontre plus directement grâce au théorème de la projection sur un convexe fermé (cf. *Objectif agrégation*).

Références

[Bré] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 2005.

[Com] François Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 2003.

[Eid] Jean-Denis Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage & Mounet, 2009.

[FGN An3] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse 3*, Cassini, 2014.

[TauG] Patrice Tauvel, *Géométrie*, Dunod, 2005.