

I - Arcs paramétrés

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

A - Paramétriser, ou comment parcourir une courbe

[BG] 312 Def 1: On appelle arc paramétré de classe C^k ($0 \leq k \leq +\infty$) un couple (I, γ) où I est un intervalle et $\gamma \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$.

On appelle chemin un arc paramétré continu, et l'arc un chemin $[a, b]$, γ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

[BG] On dit que (I, γ) est simple si $\gamma(I)$ ne s'auto-intersecte pas.

[BG] 313 Soit (I, γ) de classe C^k . On appelle changement de paramétrage un C^k -diffeomorphisme $\theta: I \rightarrow J$. On appelle support de (I, γ) l'ensemble $\gamma(I) = \gamma \circ \theta^{-1}(J)$.

[BG] 324 323 Def 2: Soit (I, γ) un chemin C^1 par morceaux. On appelle longueur de (I, γ) la quantité $\mathcal{L}(\gamma(I)) = \int_I |\gamma'|$.

On dit que γ est un paramétrage par longueur d'arc ou une abscisse curviligne si γ est C^1 et si $\forall t \in I, \|\gamma'(t)\| = 1$. Le cas échéant,

$$\forall [a, b] \subseteq I, \quad \mathcal{L}(\gamma([a, b])) = \int_a^b |\gamma'| = b - a.$$

[BG] 325 Rq 3: $\int_I |(\gamma \circ \theta)'| = \int_I |\gamma' \circ \theta \cdot \theta'| = \int_I |\gamma'|$ donc la longueur d'un arc paramétré ne dépend que de son support.

Ex 4: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$. Le graphe de f peut être paramétré par $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$.

Le cercle centré en $a \in \mathbb{R}^2$ de rayon $R > 0$ peut être paramétré par longueur d'arc par $\gamma: [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto a + R(\cos(t/R), \sin(t/R))$, et le périmètre de ce cercle, i.e. la longueur de (I, γ) , est $2\pi R$.

$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (R \cos(t), R \sin(t), at)$ décrit une hélice autour de (Oz) , de rayon $R > 0$ et de pas $2\pi|a|$. Ce n'est pas une abscisse

curviligne, mais $t \mapsto \gamma(t/\sqrt{R^2+a^2})$ en est une.

Ex 5: $t \in \mathbb{R} \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ paramétrise le cercle unité privé de $(-1, 0)$.

Appli 6: $SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/(q \pm 1)\mathbb{Z}$.

B - Courbure

Dans cette section, (I, γ) est un arc lisse paramétré par longueur d'arc de $\mathbb{R}^2$. Soit $p = \gamma(t)$ un point de $\Gamma = \gamma(I)$.

Lemme 7: $\langle \gamma'(t) | \gamma''(t) \rangle = 0$.

Def 8: La courbure de Γ en p est $K_\Gamma(p) := \|\gamma''(t)\|$.

Dans $\mathbb{R}^2$, la courbure algébrique de Γ en p est $k_\Gamma(p) := \langle \gamma''(t) | i(\gamma'(t)) \rangle$ où i désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Thm 9: Γ est entièrement déterminé par $\gamma(t_0)$, $\gamma'(t_0)$ ($t_0 \in I$) et k_Γ .

Ex 10: Γ est une droite ssi $k_\Gamma = 0$.

Γ est un cercle de rayon $R > 0$ ssi $k_\Gamma = 1/R$.

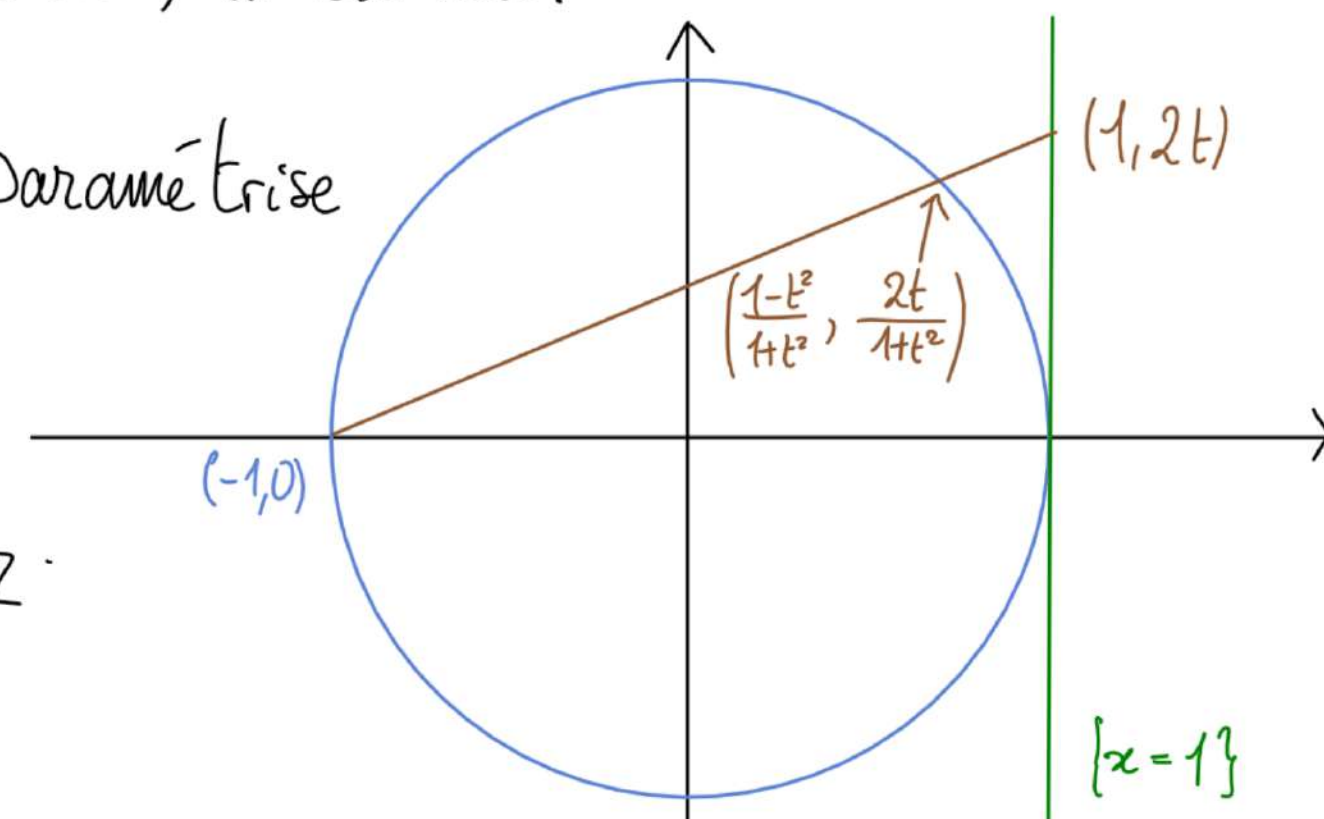
[Admis] Si Γ est le graphe d'une fonction f , alors $k_\Gamma = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$.

C - Applications à la mécanique du point / en géométrie

Ex 11: Une corde pendue entre deux points de même hauteur décrit un cosinus hyperbolique.

Un point sur une roue décrit un cycloïde: $t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$

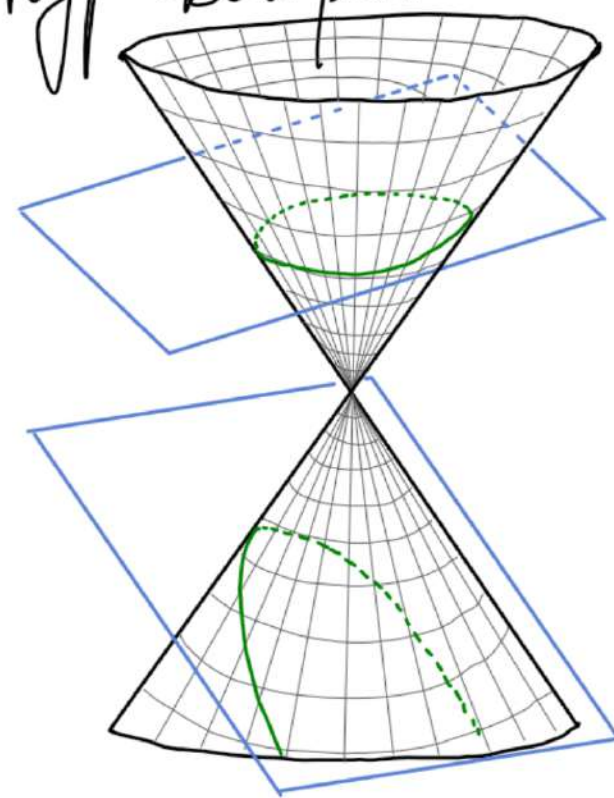
Un point sur une roue qui tourne autour d'une roue identique décrit une cardioïde ($p = a(1 + \cos(\theta))$): $t \mapsto 2(1 + \cos(t))(\cos(t), \sin(t))$.



Ex 12: On considère une particule chargée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, $B > 0$, $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère orthonormé. On note $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation par longueur d'arc de sa trajectoire dans $\mathcal{R}$. Il existe $a < 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\gamma''(t) = a \gamma'(t) \wedge \vec{B} = a B \lambda i(\gamma'(t))$, $\lambda < 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\gamma(t) \in (Oxy)$, et $k_{\gamma(t)}(\gamma(t)) = a B \lambda$. En particulier, la particule suit un cercle dont la position et le rayon sont déterminés par $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$.

Ex 13: On considère un satellite lancé dans l'espace. On note $\vec{v}_0$ sa vitesse à un instant t_0 . Il existe une valeur $v_e > 0$ (appelée vitesse de libération) telle que:

- Si $\|\vec{v}_0\| < v_e$, alors le satellite orbite selon une trajectoire elliptique
- Si $\|\vec{v}_0\| = v_e$, alors le satellite a une trajectoire parabolique
- Si $\|\vec{v}_0\| > v_e$, alors le satellite a une trajectoire hyperbolique.



Rq 14: Les ellipses, paraboles et hyperboles, avec les cercles et les couples de droites, sont appelées coniques. Elles sont l'intersection d'un plan avec un cône.

II - Analyse complexe

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin C^1 par morceaux de support Γ .

Def 15: Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur Γ . On définit l'intégrale de f le long de γ : $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$.

Def 16: Supposons que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. On appelle indice de z par

rapport à γ la quantité:

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}$$

Rq 17: $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ mesure le nombre de fois que γ "tourne autour" de z dans le sens trigonométrique.

Thm 18 (de l'indice): Ind_{γ} est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et nulle sur la composante non bornée.

Thm 19 (de JORDAN): Soit γ un lacet simple de support Γ . Alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non, appelées intérieur et extérieur de Γ .

DEV 1 (cas C^1)

Cor 20 (inégalité isopérimétrique): Soit Γ le support d'un lacet simple du plan, de longueur l . Notons A l'aire de l'intérieur de Γ . Alors $A \leq \frac{l^2}{4\pi}$, avec égalité si, et seulement si Γ est un cercle.

Thm 21 (de CAUCHY): Supposons que γ est un lacet et que Ω est convexe. Si f est holomorphe sur Ω , alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Appli 22: En intégrant $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ le long de Γ_+ de FIGURE 1, on montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de DIRICHLET).

Thm 23 (des résidus): Soient $\{a_1, \dots, a_n\} \in \Omega$, f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Supposons que Ω est convexe, que γ est un lacet et que $\forall k \in [1, n]$, $a_k \notin \Gamma$. Alors:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

où $\text{Res}(f, z)$ est le résidu de f en z .

Appli 24: Soit $\alpha > 0$. En intégrant $z \mapsto e^{-\alpha z^2}$ le long de Γ_- de FIGURE 1, on montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

III - Systèmes autonomes plans

A - Points d'équilibre, isoclines, intégrales premières

[Be^t]
186 Def 25 : ▶ L'isocline verticale (resp. horizontale) de f est l'ensemble :
 $I_\infty := \{x \in \Omega \mid f_1(x) = 0\}$ (resp. $I_0 := \{x \in \Omega \mid f_2(x) = 0\}$)

▶ L'isocline d'inclinaison $\alpha \in \mathbb{R}$ de f est l'ensemble $I_\alpha = \{x \in \Omega \mid f_2(x) = \alpha f_1(x)\}$.

Prop 26 : Soit $\alpha \in [0, +\infty]$. Si $x \in I_\alpha$, alors $f(x)$ dirige une droite de pente α .
Cela servira plus bas à tracer des portraits de phase, car $y'(t) = f(y(t))$ est tangent à la courbe décrite par y en t .

[Be^t]
189 Prop 27 : L'ensemble des points d'équilibre de (E) est $I_0 \cap I_\infty$.

[Be^t]
191 Def 28 : ▶ Les courbes intégrales de f sont les trajectoires des solutions maximales de (E) .

[Be^t]
191 191 193 ▶ L'orbite de (E) issue de $y_0 \in \Omega$ est la courbe intégrale de f passant par y_0 (qui est bien unique d'après le théorème de CAUCHY - LIPSCHITZ).

▶ Une intégrale première de (E) est une fonction $H \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que pour toute solution (J, y) de (E) , on a $\forall t \in J, \frac{d}{dt} [H(y(t))] = 0$.

Pr 29 : Une solution de (E) est contenue dans une ligne de niveau de H .

[Be^t]
403 Ex 30 : L'énergie mécanique est une intégrale première en dynamique du point.

Exemple : $\theta'' + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \rightarrow 2\theta'\theta'' + 2\omega^2 \theta' \sin(\theta) = 0 \rightarrow H\left(\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}\right) = (\theta')^2 - 2\omega^2 \cos(\theta)$.

B - Portraits de phase

[Be^t]
191 Def 31 : Un portrait de phase est une représentation géométrique de la trajectoire d'un système dynamique dans l'espace (dit "de phases") où il prend ses valeurs.
Cela correspond à la partition en orbites de l'espace des phases.

Pr 32 : Par unicité dans le théorème de CAUCHY - LIPSCHITZ, chaque point de l'espace de phase appartient à une unique trajectoire : en particulier, les différentes trajectoires ne s'intersectent pas.

Ex 33 : $(E) : \begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$ FIGURE 3 : isoclines, portrait de phase

Système proie-prédateur de LOTKA et VOLTERRA

Soit $(\alpha, b, c, d) \in (\mathbb{R}^{++})^4$. On considère $(E) : \begin{cases} x' = \alpha x - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$ DEV2

Prop 34 : $H : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto dx + by - c \ln(x) - a \ln(y)$ est une intégrale première de (E) sur $(\mathbb{R}^{++})^2$.

Prop 35 : Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Le problème de CAUCHY $\{(E); x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0\}$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$. Celle-ci est périodique.

FIGURE 4 : Portrait de phase de (E) .

FIGURE 1

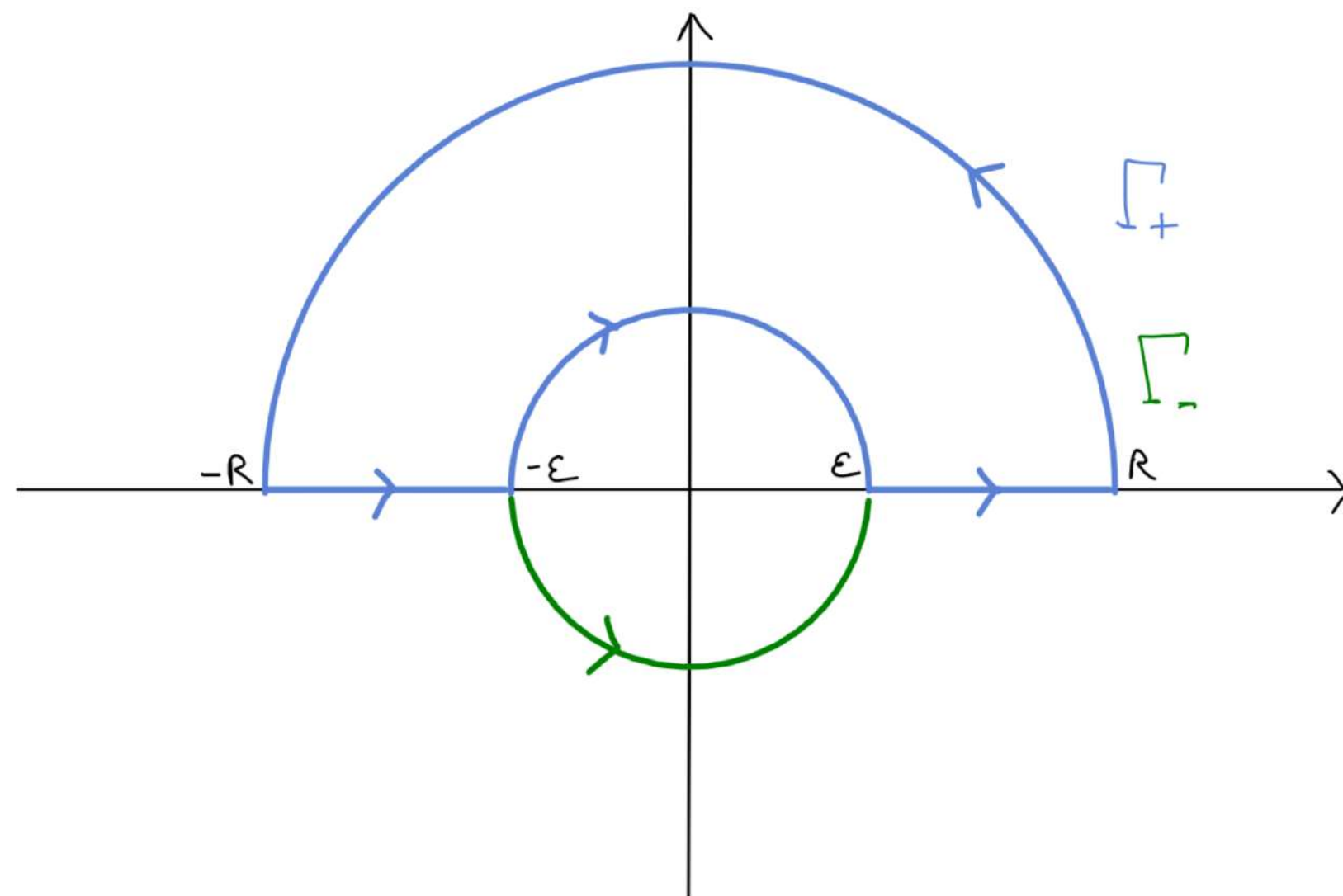


FIGURE 2: Points d'équilibre du pendule simple

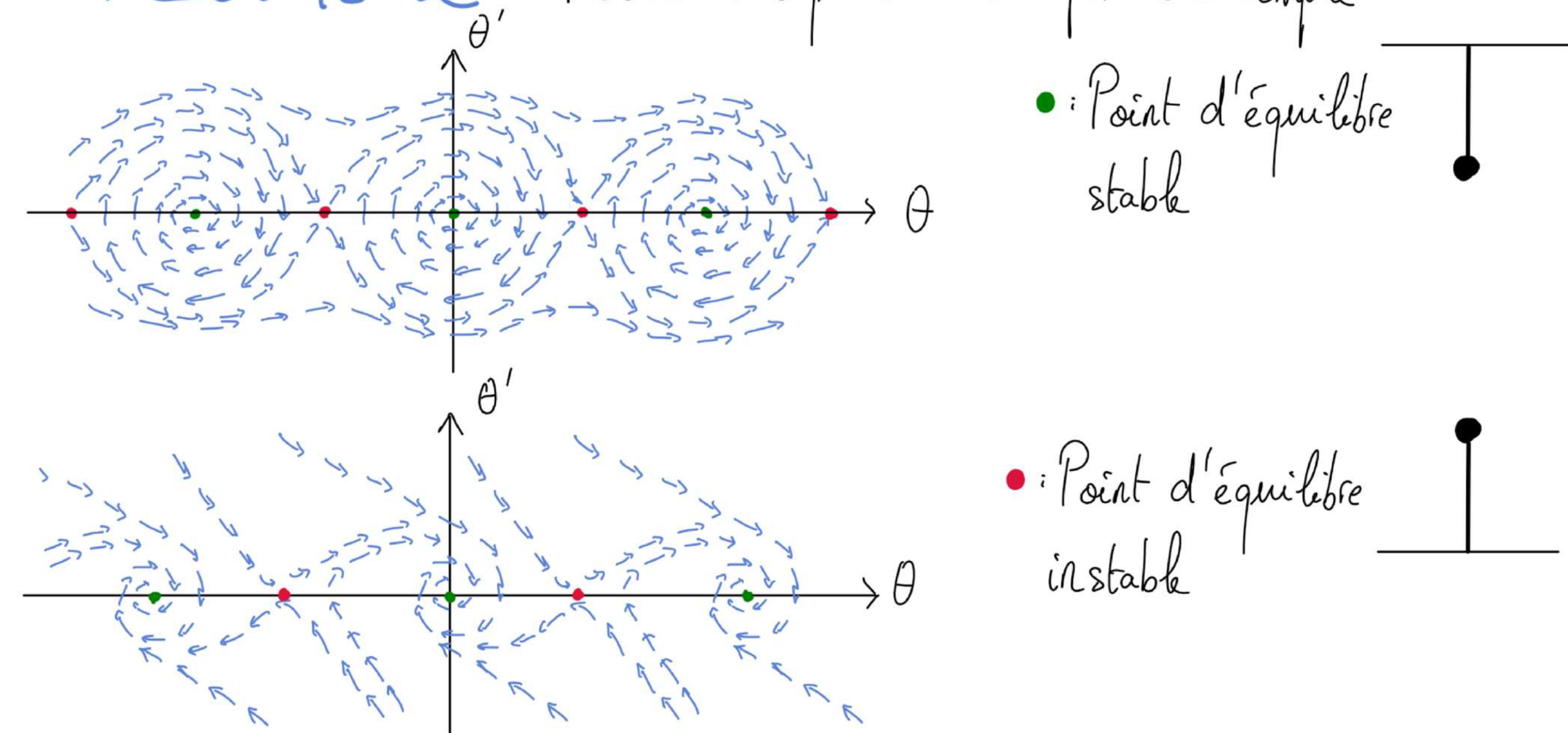


FIGURE 3: (E): $\begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$ (portrait de phase)

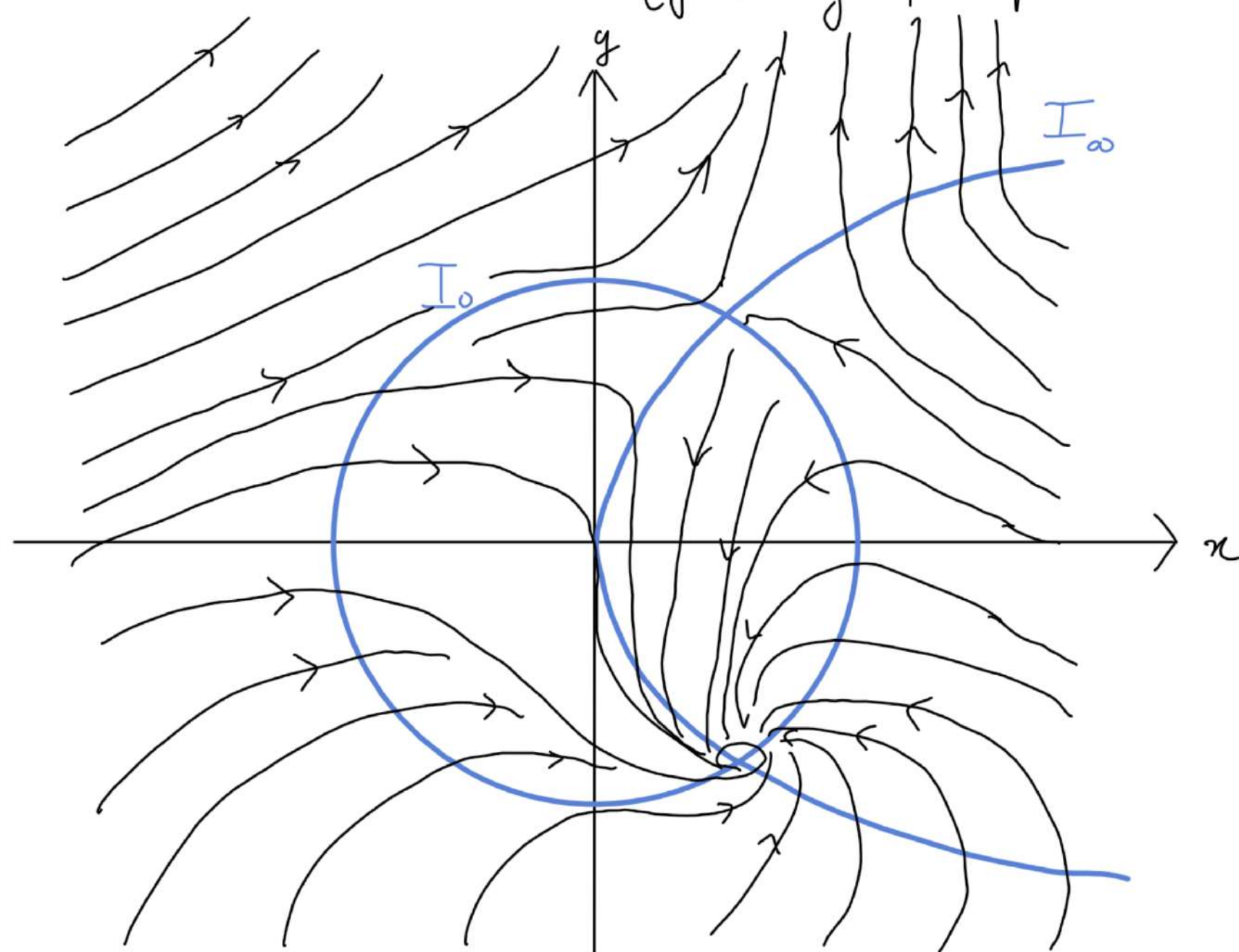
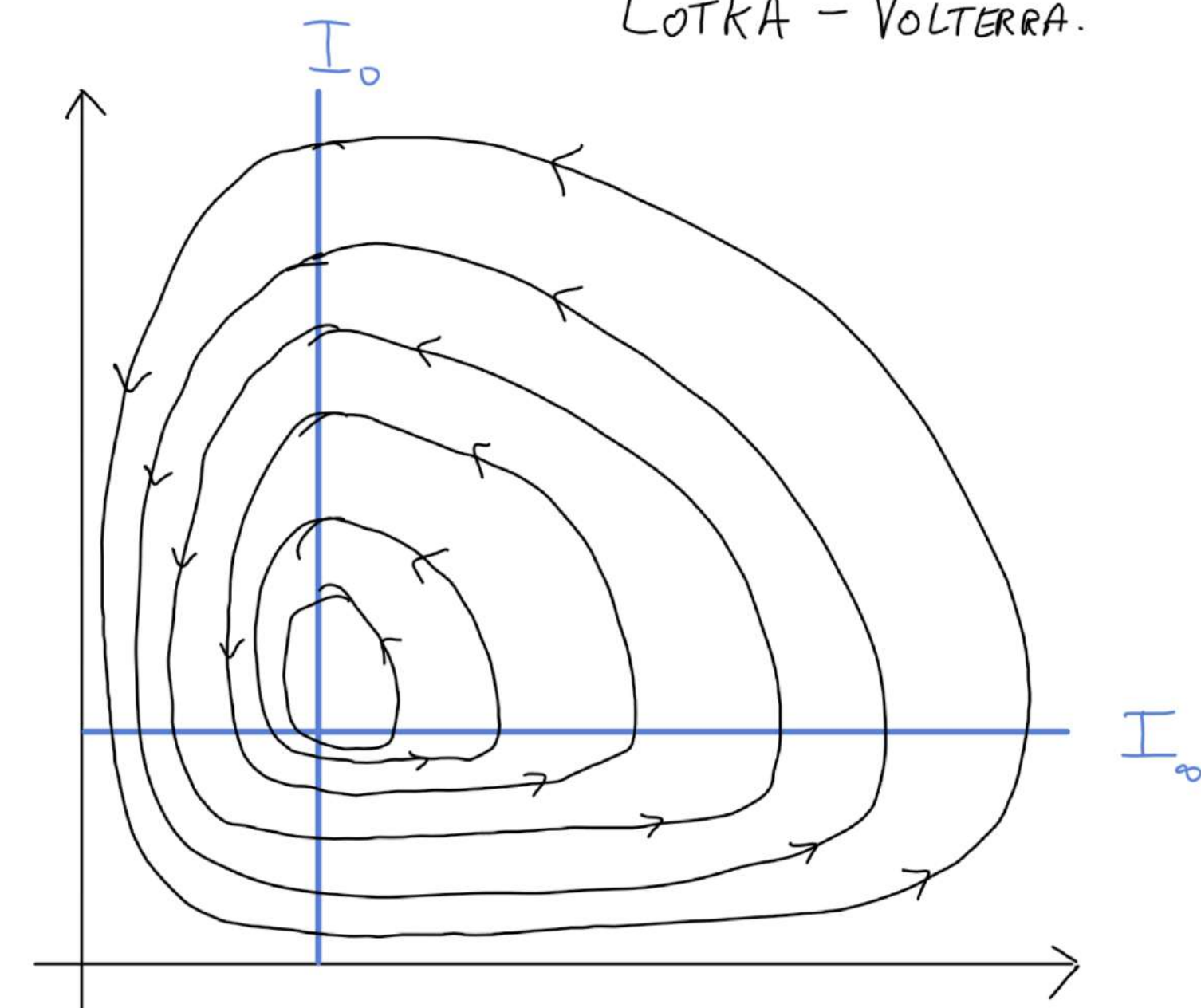


FIGURE 4: Portrait de phase du système de LOTKA - VOLTERRA.



[BG] Berger - Gostiaux

[Be] Berthelin

RÉFÉRENCES: [Au] Audin, Géométrie

[T] Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3