266

Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Dans toute la leçon, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

I – De l'intégration aux probabilités : notion(s) d'indépendance

A – Événements indépendants : définitions et construction explicite

[GK] 49 <u>Def 1</u> : Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. L'application $A \longmapsto \mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Le réel $\mathbb{P}(A|B)$ est appelé probabilité conditionnelle de A sachant B. Par convention, si $\mathbb{P}(B) = 0$, on pose $\mathbb{P}(A|B) = 0$.

[GK] 52 <u>Def 2</u> : Soit $(A,B) \in \mathcal{A}^2$. On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B)$, autrement dit si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

<u>Ex 3</u> : On lance deux dés à 6 faces équilibrés identifiables. On considère les événements A : "le premier dé donne 1", B : "le second dé donne 7", C : "la somme des dés vaut 7". Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

[GK] 52 <u>Def 4</u> : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$. On dit que les A_i, $i \in I$ sont (mutuellement) indépendants si pour tout $J \subseteq I$ fini, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$.

<u>Rq 5</u> : Il n'est pas clair qu'une famille infinie d'événements indépendants existe. C'est l'objet de l'exemple suivant, selon lequel il existe une suite de pile ou face indépendants.

<u>Ex 6</u> : Considérons $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Pour $n \geq 1$, on définit l'événement $A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left]\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]$ {FIGURE 1}.

La famille $(A_n)_{n\geq 1}$ est (mutuellement) indépendante.

<u>Rq 7</u> : L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, et la réciproque est fausse (Ex 3 fournit un contre-exemple).

<u>Prop 8</u> : Soit $(A,B) \in \mathcal{A}^2$. Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si $\bar{A}$ et B le sont.

<u>Appli 9</u> : $\forall s \in]1,+\infty[$, $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$. [GK] 56 + 461

<u>Cor 10</u> : $\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = +\infty$

DEV 1

B – Indépendance de tribus et de variables aléatoires

<u>Def 11</u> : Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que les $\mathcal{A}_i$, $i \in I$ sont (mutuellement) indépendantes si pour toute $(A_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$, les A_i, $i\in I$ sont (mutuellement) indépendants. [GK] 52

<u>Def 12</u> : Soient $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $i \in I$ des espaces mesurables, et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires telles que $X_i : \Omega \longrightarrow \mathcal{E}_i$. On dit que les X_i, $i \in I$ sont (mutuellement) indépendantes si les tribus engendrées $\sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(\varepsilon) : \varepsilon \in \mathcal{E}_i\}$, $i \in I$ sont (mutuellement) indépendantes, autrement dit si : [GK] 126

$$\forall J \subseteq I \text{ fini},\ \forall (A_j)_{j\in J} \in \mathcal{A}^J,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j \in A_j\}\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(X_j \in A_j).$$

<u>Ex 13</u> : Dans Ex 3, notons X_1 et X_2 les variables aléatoires donnant les résultats des deux dés : elles sont indépendantes. En revanche, X_1, X_2 et $X_1 + X_2$ ne sont pas indépendantes.

<u>Prop 14</u> : Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si, et seulement si $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$. [GK] 128

<u>Lemme 15</u> : Soit μ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $F^-(U) \sim \mu$, où $F^- : y \in]0,1[\longmapsto \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \mu(]-\infty, t]) \geq y\}$. [CR] 24

<u>Lemme 16</u> : Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{2^n} \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Thm 17 : Pour toute probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il existe une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi μ. FIGURE 2

Cor 18 : C'est encore vrai dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

II - Premières propriétés autour de l'indépendance

A - Critères d'indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires.

Prop 19 : X et Y sont indépendantes si, et seulement si pour toutes g, h mesurables positives (ou continues bornées), $\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$.

[GK] 175 Prop 20 : Si X et Y sont indépendantes, réelles et intégrables, alors XY est intégrable et $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. En particulier, $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, i.e. X et Y ne sont pas corrélées.

[GK] 176 Rq 21 : Soient $X \sim \mathcal{U}([-1,1])$ et $Y = X^2$: ces variables ne sont pas corrélées, mais elles ne sont pas indépendantes.

Ex 22 : ▸ Soient $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{R}(p)$. Alors $\prod_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{R}\left(\frac{1+(2p-1)^n}{2}\right)$.

▸ Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{P}(2)$. Posons $P_n = \prod_{i=1}^n X_i$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(P_n)_n$ converge vers 0 en probabilités, mais pas dans L^1.

[GK] 243 Prop 23 : Supposons X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \iff \varphi_{(X,Y)} = \varphi_X \otimes \varphi_Y$$

[GK] 135 136 Prop 24 : ▸ Si (X,Y) est à densité, alors X et Y aussi, et X et Y sont indépendantes si, et seulement si $f_{(X,Y)}$ est à variables séparables. Le cas échéant, $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$.

▸ Si X et Y sont indépendantes et à densité, alors (X,Y) aussi, et $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$.

Rq 25 : L'indépendance est cruciale ! Contre-exemple : si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y = X$, alors $(X,Y) = (X,X)$ n'est pas à densité.

B - Sommes de variables aléatoires

Prop 26 : Soient X et Y indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

▸ Si X et Y sont discrètes, alors $P(X+Y=z) = \sum_{x+y=z} P(X=x)P(Y=y)$

▸ Si X et Y sont à densité, alors $X+Y$ aussi, et $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

Ex 27 : ▸ Si $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. [KG] 138

▸ Si $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

Prop 28 : Si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ [KG] 243

Ex 29 : Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes, alors [CR] 160

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

Prop 30 : Si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ [KG] 236

Ex 31 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Prop 32 : Si $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, si $N : \Omega \to \mathbb{N}^*$ est indépendante de $X_1, \dots, X_n$, alors $G_{\sum_{i=1}^N X_i} = G_N \circ G_{X_1}$. [CR] 43

Prop 33 : Si X et Y sont indépendantes et de carré intégrable, alors

$$\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y].$$

C - Vecteurs gaussiens

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Def 34 : On dit que X est un vecteur gaussien si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u, X\rangle$ suit une loi normale. [KG] 319

Prop 35 : X est gaussien si, et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_X(u) = \exp(i\langle u, m\rangle - \frac{1}{2}\langle \Gamma u, u\rangle)$. On note alors $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$. [CR] 160

[CR] 162 Prop 36 : Si X est un vecteur gaussien, alors X_i et X_j sont indépendantes si, et seulement si elles sont non corrélées.

[KG] 185 Appli 37 (Box-Muller) : Soient $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $V \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendantes. Les v.a. $\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V)$ et $\sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$ sont i.d. et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

III – Théorèmes limites en probabilités

A – Lemme de Borel-Cantelli

[KG] 272 Lemme 38 (de Borel-Cantelli) : Soit $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

- Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.
- Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge et si les A_n sont indépendants, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 1$

Ex 39 : Si un singe immortel presse aléatoirement les touches d'une machine à écrire, il tapera presque sûrement n'importe quelle séquence finie de caractères une infinité de fois.

Cor 40 : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. réelles, soit X une v.a. réelle. Si pour tout $\varepsilon > 0$ (on peut restreindre cette condition à $0 < \varepsilon < A$, A fixé), la série $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$.

B – Lois des grands nombres

[KG] 269 Thm 41 (loi faible des grands nombres) : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. intégrables. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$.

[KG] 277 Thm 42 (loi forte des grands nombres) : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d.

$$X_1 \text{ est intégrable} \iff \exists c : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} c$$

Le cas échéant, $c = \mathbb{E}[X_1]$

Ex 43 : Les moments empiriques sont des estimateurs fortements consistants.

C – Théorème central limite

Thm 44 (Théorème central limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d de carré intégrable. On pose $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. [B] 207

DEV 2

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Ex 45 : Soient $p \in]0,1[$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de $\mathcal{B}(p)$. Soit $\alpha \in]0,1[$. Un intervalle au niveau de confiance asymptotique $1-\alpha$ est donné par : [B] 207

$$\left[\overline{X_n} - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}},\ \overline{X_n} + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}\right]$$

où $\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ et $q_{1-\alpha/2}$ est le $1-\frac{\alpha}{2}$ quantile de la $\mathcal{N}(0,1)$.

Références

[CR] : Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques (Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch)

[KG] : De l'intégration aux probabilités (Aline Kurtzmann, Olivier Garet) [2e édition augmentée]

[B] : Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J. & L. Bernis)

FIGURE 1 : $A_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left] \frac{2(k-1)}{2^n} \;\; \frac{2k-1}{2^n} \right]$

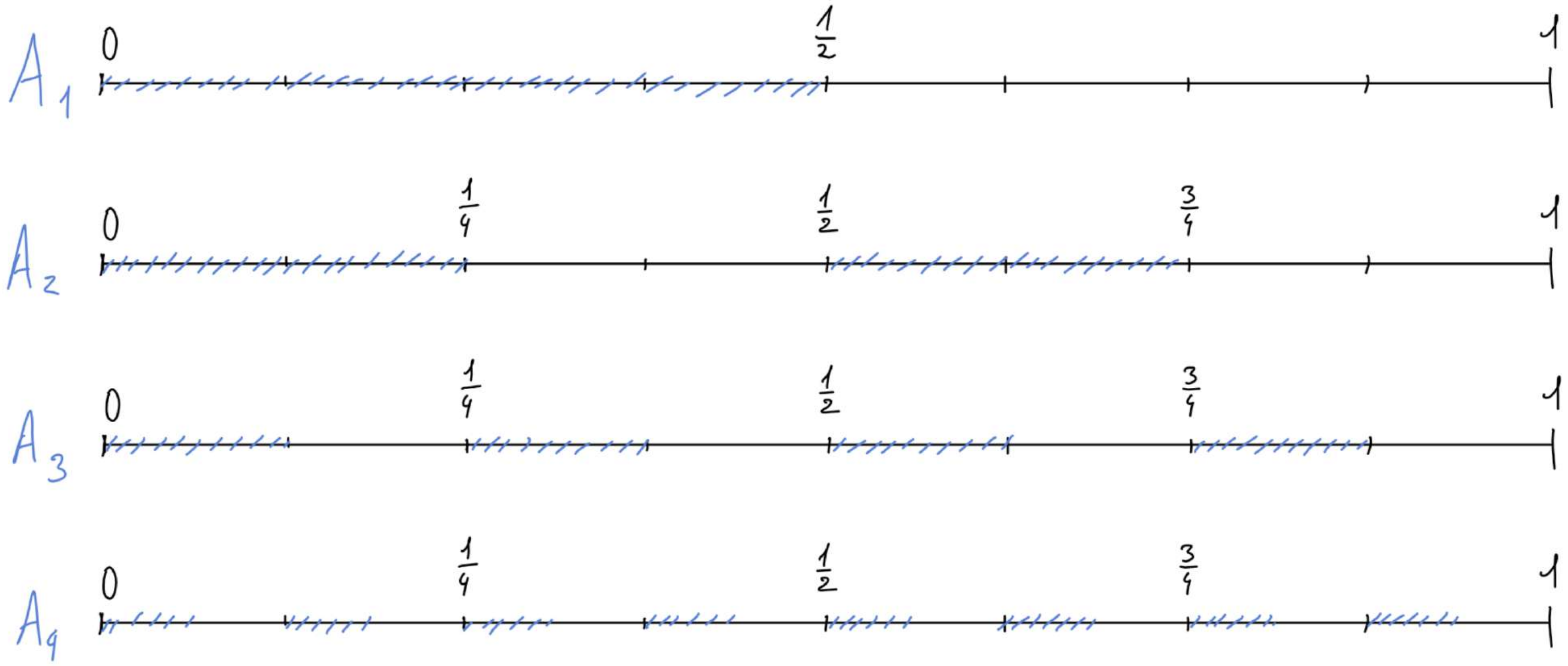

FIGURE 2 :

$(\varepsilon_n = \mathbb{1}_{A_n})_n$ suite de $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ indépendants

$$\varepsilon^{(1)} : \varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_4 , \varepsilon_7 , \varepsilon_{11} , \dots \Longrightarrow \mathcal{U}([0,1])$$

$$\varepsilon^{(2)} : \varepsilon_3 , \varepsilon_5 , \varepsilon_8 , \varepsilon_{12} , \dots \Longrightarrow \mathcal{U}([0,1])$$

$$\varepsilon^{(3)} : \varepsilon_6 , \varepsilon_9 , \varepsilon_{13} , \dots \Longrightarrow \mathcal{U}([0,1])$$

$$\varepsilon^{(4)} : \varepsilon_{10} , \varepsilon_{14} , \dots \Longrightarrow \mathcal{U}([0,1])$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$