

I - La fonction exponentielle

A - Définitions

[T]
43 Def 1: Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ que l'on appelle exponentielle de z .

[T]
43 Prop 2: $\exp$ est définie comme somme d'une série absolument convergente de rayon de convergence infini.

[T]
43 Prop 3: $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$

- $\exp(0) = 1$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
- $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et $\exp' = \exp$.

Def 4: On pose $e = \exp(1)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \exp(z)$.

Prop 5 (formule de MOIVRE): $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(it)^n = \exp(int)$

[T]
44 Thm 6: $t \mapsto e^{it}$ est périodique. On note π sa plus petite demi-période > 0 .

[T]
44 Prop 7: $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective.

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est bijective et strictement croissante.

[Rb]
360
391 Thm 8: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'unique morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ valant 1 en 0.

► $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

B - Fonctions trigonométriques et hyperboliques

[T]
45
-46 Def 9: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\cos(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$, $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$
si $\cos(z) \neq 0$, $\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ et $\operatorname{th}(z) = \frac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)}$, que l'on appelle cosinus, sinus, tangente, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyper-

bolique de z .

Prop 10: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it))$.

Prop 12: $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\exists! \theta \in]-\pi, \pi]$: $z = |z| \exp(i\theta)$.

On appelle argument principal de z le réel $\operatorname{Arg}(z) = \theta$.

Prop 13: Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N \exp(inx)$ et $K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$.

Alors $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$ et $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$

Appli 14: Analyse des séries de FOURIER.

Prop 15: $\cos$ et $\sin$ induisent des bijections de $[0, \pi]$ et $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$, de réciproques notées $\arccos$ et $\arcsin$.

► $\tan$ induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, de réciproque notée $\arctan$.

FIGURE 1: Quelques courbes représentatives

II - Les fonctions logarithme

Thm/Def 16: La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie par les propriétés équivalentes suivantes:

- $\ln$ est la réciproque de $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$,
- $\ln$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1.
- $\ln$ est l'unique morphisme continu de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ valant 0 en 1.

Def 17: La détermination principale du logarithme est l'application:

$$\operatorname{Log}: z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \mapsto \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z).$$

Thm 18: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \exp(\operatorname{Log}(z)) = z$

[T]
45[T]
62[Da]
355[Da]
348[Rb]
358[T]
63

[T]
63

► $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \in]-\pi, \pi] \Rightarrow \operatorname{Log}(\exp(z)) = z$

Cor 19: $\exp$ et Log induisent des bijections réciproques.

Def 20: Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $z \in \mathbb{C}$, on définit $a^z := \exp(z \operatorname{Log}(a))$.

[T]
64

Prop 21: Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et $\forall z \in B(0,1), -\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

[T]
63

Def 22: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Une détermination du logarithme sur U est une fonction f telle que $\exp \circ f = \operatorname{id}_U$ sur U .

[T]
63

Thm 23: Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

III - La fonction Γ d'EULER

A- Définition et propriétés

[Go]
315

Def 24: On pose $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Pour $z \in \Omega_0$, on définit:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Thm 25: La fonction Γ est bien définie et holomorphe sur Ω_0 .

Cor 26: La fonction Γ est lisse sur $\mathbb{R}^{++}$.

Prop 27: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Prop 28: ► $\forall z \in \Omega_0, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$$\text{► } \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

$$\text{► } \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

DEV 2

Prop 29: Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes.

Cor 30: $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$, $\Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{\Gamma(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Appli 31: **FIGURE 2**: allure du graphe de Γ .

Def 32: Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$
(la fonction bêta d'EULER)

Prop 33: $\forall x > 0, \forall y > 0, B(x, y) = B(y, x)$ et $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$

Appli 34 (formule d'EULER-GAUSS): $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$

Thm 35: Γ se prolonge à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ en une fonction holomorphe vérifiant la formule d'EULER-GAUSS.

[BMP]
~82

[Be]⁷⁴ Thm 36 (formule des compléments): $\forall z \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re}(z) < 1 \Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

[F]¹⁰⁵ Thm 37 (formule de STIRLING): $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$

[Rb]³⁶⁶ Thm 38 (de BOHR-MOLLERUP): $\Gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est l'unique fonction C^1 telle que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\ln(\Gamma)$ est convexe et $\Gamma(1) = 1$.

B-Applications en probabilités

[CR]³⁵⁴ Def 39: La loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ est la loi $\Gamma(a, \lambda)$ de densité:

$$x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$$

[CR]³⁵⁴ Prop 40: $\Gamma(n, \lambda)$ est la loi de la somme de n lois $E(\lambda)$ indépendantes. Elle La loi $\Gamma(a, \lambda)$ modélise la durée de vie d'un organisme ou d'un appareil avec vieillissement lorsque $\Gamma(a, \lambda) \neq E(\lambda)$, i.e. $a \neq 1$.

Thm 41: $\varphi_{\Gamma(a, \lambda)}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$

[GK]¹⁸⁰ Cor 42: Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$ et $X \perp Y$, alors $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$.

[GK]³²⁶ Prop 43: $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(n)$.

[GK]¹⁴⁶ Def 44: La loi bêta de paramètres a et b est la loi $B(a, b)$ de densité:

$$x \mapsto \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \mathbb{1}_{0 < x < 1}$$

[GK]¹⁴⁶ Prop 45: $\forall x > 0, \forall y > 0, B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

RÉFÉRENCES

[T]	[Da]	[F]
[Rb]	[Gr]	[CR]
[Go]	[GK]	[FGN]
[BMP]	[Be]	

IV - La fonction ζ de RIEMANN

Def 46: On pose $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Pour $z \in \Omega_1$, on définit:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

Prop 47: $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ et $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$

Prop 48: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n^{-x}$ et $g_n(x) = (-1)^n n^{-x}$.

- $\sum f_n$ converge absolument sur $]1, +\infty[$ mais pas uniformément.
- $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- $\forall x > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = (2^{1-x} - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Prop 49: $\forall s > 1, \zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du$

Thm 50: ζ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe admettant en 1 son unique pôle, de résidu 1.

Thm 51: $\forall s > 1, \zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$

Cor 52: $\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = +\infty$

DEV 2

Prop 53: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$ où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite telle que $\forall z \in B(0, 1), \frac{e^z}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.

Conj 54 (de RIEMANN): $\forall z \in \mathbb{C}, \zeta(z) = 0 \Leftrightarrow z \in -2\mathbb{N}^*$ ou $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

FIGURE 1: Quelques courbes représentatives

4/4

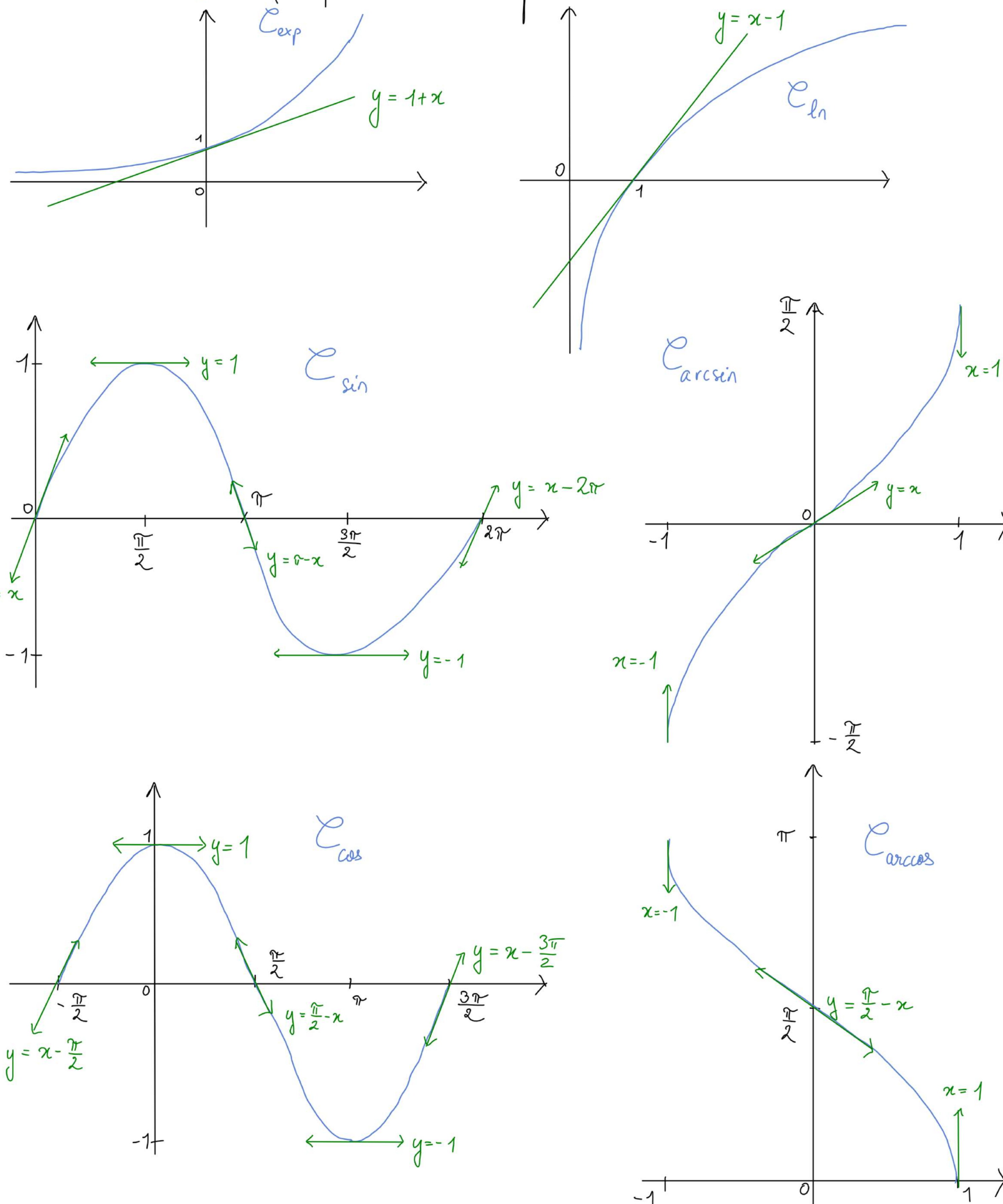


FIGURE 2

