Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(E, \mathcal{E})$ un espace probabilisable.

# I - Généralités sur les variables aléatoires discrètes

## A - Définition, caractérisation, simulation

[CR] 21 Def 1 : • Une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$ est discrète si elle est presque sûrement à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. On note $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{E} \mapsto \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)) =: \mathbb{P}(X \in A)$ la loi de $X$.

[GK] 131 • Une loi (une probabilité) $\mu$ sur $E$ est discrète s'il existe $F \in \mathcal{E}$ fini ou dénombrable tel que $\mu(F) = 1$.

Dans la suite, $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ et $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète.

[GK] 131 Thm 2 : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ (on dit que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un germe de probabilité). Il existe une unique loi $\mu$ sur $(E, \mathcal{E})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(\{e_n\}) = p_n$.

[GK] 131 Cor 3 : La famille $(\mathbb{P}(X = e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ caractérise la loi de $X$.

[GK] 131 Prop 4 : $\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$

Ex 5 : • Soit $X$ la variable aléatoire qui mesure le résultat du lancer d'un dé à 6 faces équilibré. Alors $X$ est discrète, et $\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=6) = 1/2$.

• On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Soit $X$ la variable aléatoire qui donne le rang du premier Pile. Alors $X$ est discrète, et $\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = 1/3$.

Prop 6 : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un germe de probabilité. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$.
Soient $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $f : x \in [0,1] \longmapsto e_n$ si $x \in [s_n, s_{n+1}[$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(f(U) = e_n) = p_n$.

## B - Lois discrètes usuelles [CR] 331

| Loi | Notation | Distribution | Modélisation |
|---|---|---|---|
| Uniforme | $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$ $(a \leq b)$ | $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$ $(a \leq k \leq b)$ | Choix au hasard d'un entier entre $a$ et $b$. |
| Bernoulli | $\mathcal{B}(p)$ | $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ $\mathbb{P}(X=1) = p$ | Une expérience aléatoire à 2 issues (dite de Bernoulli), de probabilité de succès $p$. |
| Binomiale | $\mathcal{B}(n,p)$ | $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$ | Nombre de succès dans $n$ répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli (un schéma de Bernoulli) |
| Poisson | $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N})$ | Nombre de personnes passant par un guichet en 1h sachant que le temps entre 2 personnes suit une $\mathcal{E}(\lambda)$. |
| Géométrique | $\mathcal{G}(p)$ | $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $(k \geq 1)$ | Rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli. |

## C - Indépendance

Def 7 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires (discrètes), telle que $\forall i \in I$, $X_i$ est presque sûrement à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $E_i$. Les $X_i$, $i \in I$ sont (mutuellement) indépendantes si : [CR] 27

$$\forall J \subset I \text{ fini}, \quad \forall (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} E_j, \quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} \{X_j = x_j\}\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j = x_j)$$

Rq 8 : Soient $X$ et $Y$ mesurant le résultat du lancer de deux dés à 6 faces équilibrés, et $Z = \mathbb{1}_{X+Y \in 2\mathbb{N}}$. Les variables aléatoires discrètes $X, Y, Z$ sont deux à deux indépendantes, mais pas mutuellement.

Prop 9 : Soient $X$ et $Y$ discrètes, réelles et indépendantes. [CR] 28

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x+y=z} \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = z - x)$$

Ex 10 : Soient $X$ et $Y$ indépendantes.

• Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m, p)$

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Ex 13 (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$) : À chaque instant, $\mathbb{P}(k \to k+1) = 1 - \mathbb{P}(k+1 \to k) = p \in ]0,1[$. La probabilité de revenir en 0 partant 0 en $2n$ étapes est la probabilité de faire $n$ pas à droite et $n$ à gauche, et donc vaut $[p(1-p)]^n \binom{2n}{n}$.

Ex 14 : Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. La famille $\left(\frac{1}{\zeta(s) n^s}\right)_{n \geq 1}$ est un germe de probabilité. On note $\mu_s$ la probabilité associée sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ (appelée loi zêta de paramètre $s$). Notons $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite
[GK] 56 +461 croissante des nombres premiers, posons $A_k = p_k \mathbb{N}^*$ pour $k \geq 1$. Les événements $A_k$, $k \geq 1$ sont (mutuellement) indépendants.

Cor 15 : $\forall s > 1$, $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$

Cor 16 : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$

DEV 1

## II - Moments d'une variable aléatoire discrète

### A - Moment d'ordre k, formule de transfert

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles discrètes. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

[CR] 35 Def 17 : On dit que $X$ admet une espérance ou est intégrable si $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x) < +\infty$. Le cas échéant, on définit l'espérance de $X$ :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

[CR] 37 Prop 18 : • Si $X$ et $Y$ sont intégrables, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $X + \lambda Y$ est intégrable et $\mathbb{E}[X + \lambda Y] = \mathbb{E}[X] + \lambda \mathbb{E}[Y]$.

• Si $X$ est intégrable et positive, alors $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

Rq 19 : Si $X$ est intégrable et $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = 1$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Appli 20 : La loi géométrique est l'unique loi sans mémoire sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Thm 21 (de transfert) : Pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, $f(X)$ est intégrable [CR] 35
si, et seulement si $\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)| \mathbb{P}(X = x) < +\infty$. Le cas échéant :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

Def 22 : • On dit que $X$ admet un moment d'ordre $k$ si $X^k$ est intégrable, [CR] 36
autrement dit si $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^k \mathbb{P}(X = x) < +\infty$.

• On dit que $X$ admet une variance ou est de carré intégrable si $X^2$ est intégrable. On pose alors $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ la variance de $X$, et $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$ l'écart-type de $X$.

Prop 23 : Si $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$, alors $\mathbb{E}[|X|^{k-1}] < +\infty$. [CR] 37

Prop 24 (formule de König - Huygens) : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ [CR] 37

Prop 25 : Espérances et variances des lois usuelles : [CR] 351

| Loi | $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ | $\mathcal{B}(p)$ | $\mathcal{B}(n,p)$ | $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathcal{G}(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Espérance | $\frac{n+1}{2}$ | $p$ | $np$ | $\lambda$ | $\frac{1}{p}$ |
| Variance | $\frac{n^2-1}{12}$ | $p(1-p)$ | $np(1-p)$ | $\lambda$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |

### B - Fonction génératrice

Dans ce paragraphe, $X, Y, N$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Def 26 : La fonction génératrice de $X$ est $G_X : s \longmapsto \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) s^n$. Cette série [CR] 41
entière a un rayon de convergence d'au moins 1.

Prop 27 : Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. [CR] 42

[GK] 236-237 **Ex 28** : Fonctions génératrices des lois usuelles :

| Loi | $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ | $\mathcal{B}(p)$ | $\mathcal{B}(n,p)$ | $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathcal{G}(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_X(s)$ | $\frac{1}{n}\frac{s^{n+1}-s}{s-1}$ $(s\neq 1)$ | $1-p+ps$ | $(1-p+ps)^n$ | $e^{(\lambda-1)s}$ | $\frac{ps}{1-(1-p)s}$ |

**Rq 29** : On peut retrouver plus facilement les résultats de Ex 10 grâce aux fonctions génératrices.

[CR] 43 **Prop 30** : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, indépendantes de $N$. Posons $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$. Alors $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.

[CR] 41 **Prop 31** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$ : la fonction génératrice caractérise la loi.

[CR] 45 **Prop 32** : $X$ admet un moment d'ordre $k$ $\Leftrightarrow$ $G_X$ est $k$ fois dérivable en $1^-$. Le cas échéant, $G_X^{(k)}(1^-) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$

## III – Théorèmes limites pour les variables aléatoires discrètes

[CR] 59 **Thm 33** : Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes et $X$ discrète telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \in E) = \mathbb{P}(X \in E) = 1$.

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall x \in E,\ \mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X=x)$$

[CR] 64 **Appli 34** : Soit $(p_n)_n \in ]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$, soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoire telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(n,p_n)$. Alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

DEV 2

[CR] 62 **Thm 35** (central limite) : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires identiques, indépendantes et de carré intégrable.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}[X_1])$$

**Appli 36** : Soient $\alpha \in [0,1]$, $p \in ]0,1[$ et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Notons $q_{1-\alpha/2}$ le $(1-\frac{\alpha}{2})$-quantile de $\mathcal{N}(0,1)$. Alors : [Be] 207

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X_n} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} ; \overline{X_n} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha$$

## Références


[CR] Chabanol-Ruch

[GK] Garet-Kurtzman [2e édition]

[Be] Bernis