261

Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

I - Loi d'une variable aléatoire

A - Premières définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, E un espace euclidien muni d'une tribu $\mathcal{E}$ et d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

[CR] 21 Def 1 : Une variable aléatoire (v.a.) est une application mesurable $X : \Omega \to E$. On dit que X est une variable aléatoire réelle (v.a.r.) si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
On dit parfois que X est un vecteur aléatoire pour souligner le fait que $\dim(E) > 1$.

[CR] 21 Def 2 : Soit X une v.a. La loi de X est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X, i.e. la probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{E})$ définie par $\forall B \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

Notations : ▹ $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ ▹ $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x)$
▹ Si X est réelle : $\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t)$, $\mathbb{P}_X([a,b[) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$

Rq 3 : Deux v.a. $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ et $Y : (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}}) \to (E, \mathcal{E})$ peuvent avoir la même loi, i.e. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, bien que $\Omega \neq \tilde{\Omega}$!

Dans la suite, on se donne une variable aléatoire $X : \Omega \to E$.

Def 4 : Soit μ une proba sur $(E, \mathcal{E})$. On dit que X suit la loi μ, et on note $X \sim \mu$, si $\mathbb{P}_X = \mu$.

[CR] 21 Def 5 : Si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, alors on dit que X est discrète. En général, dans ce cas, on munit E de la tribu $\mathcal{P}(E)$.

[CR] 22 Prop 6 : Si X est discrète, alors $\forall B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$. Ainsi, la donnée de $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ caractérise la loi de X.

[CR] 22 Def 7 : On dit que X est à densité si $\mathbb{P}_X$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $(E, \mathcal{E})$, i.e. si $\forall B \in \mathcal{E}$, $\lambda(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_X(B) = 0$.

[CR] 22 Thm 8 (de Radon-Nikodym) : Si X est à densité, alors il existe une fonction $f : E \to \mathbb{R}^+$ mesurable telle que $\forall B \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X(x)\, dx$. De plus, f_X est unique à un ensemble λ-négligeable près : on l'appelle densité de X.

[CR] 22 Prop 9 : La densité caractérise la loi.

B - Cas des vecteurs aléatoires, indépendance

Soient $X_1, \dots, X_n : \Omega \to E$ $(n \geq 2)$ des v.a. et $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to E^n$ un vecteur aléatoire.

Def 10 : La loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ est la loi de X. La i-ième loi marginale de $(X_1, \dots, X_n)$ est la loi de X_i. [CR] 25

Prop 11 : • Si les X_i sont discrètes, alors $\forall x_1 \in E$, $\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in E^{n-1}} \mathbb{P}(X = (x_1, \dots, x_n))$ [CR] 25
• Si les X_i sont à densité, alors $\forall x_1 \in E$, $f_{X_1}(x_1) = \int_{E^{n-1}} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$.

Rq 12 : Si on connaît la loi conjointe, alors on connaît les lois marginales, mais l'inverse est faux : considérer (X, Y) qui mesure le résultat du lancer de deux dés. [CR] 26

Rq 13 : Si X est à densité, alors les X_i sont à densité, mais la réciproque est fausse : considérer X_1 à densité et $X = (X_1, X_1)$. [CR] 24

Def 14 : Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont dites indépendantes si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$, i.e. si $\forall (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{E}^n$, $\mathbb{P}(X \in B_1 \times \cdots \times B_n) \, (= \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n)$.

Prop 15 : Si X et Y sont indépendantes et à densité, alors $f_{X+Y} = f_X * f_Y$ où $*$ est le produit de convolution. Si X et Y sont indépendantes et discrètes, alors $\forall x \in E$, $\mathbb{P}(X + Y = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X = y, Y = x - y) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X = y)\mathbb{P}(Y = x - y)$. [CR] 28

C - Lois usuelles

Loi	Notation	Distribution	Modélisation
Uniforme	$\mathcal{U}([\![a,b]\!])$ $(a \leq b)$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$ $(a \leq k \leq b)$	Choix au hasard d'un entier entre a et b.
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ $\mathbb{P}(X=1) = p$	Une expérience aléatoire à 2 issues (dite de Bernoulli), de probabilité de succès p.
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$	Nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli (un schéma de Bernoulli)
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N})$	Nombre d'occurrences dans une unité de temps d'un événement indépendant du temps.
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $(k \geq 1)$	Rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli.

Loi	Notation	Densité	Modélisation
Uniforme	$\mathcal{U}([a,b])$ $(a<b)$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$	Choix au hasard d'un réel entre a et b.
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda>0)$	$x\mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x>0}$	Durée de vie sans usure
Normale	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$	$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	

[CR] 29 Ex 16 : Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $S_n := \sum_{k=1}^n X_k^2$ suit la loi $\chi^2(n)$, de densité $x\mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-x/2}\mathbb{1}_{x>0}$.
Cela vient du fait que $X_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, où $\Gamma(a,\lambda)$ est la loi Gamma, de densité $\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}x^{a-1}\mathbb{1}_{x>0}$.

II - Caractérisations de la loi d'une variable aléatoire

A- Fonction muette

[CR] 35 Def 17 : Sous réserve d'existence, on appelle espérance de X la quantité :

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) = \int_E x\,d\mathbb{P}_X(x).$$

[CR] 35 Thm 18 (de transfert) : Soit $h:(E,\mathcal{E})\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ mesurable. La fonction $h\circ X$, notée également $h(X)$, est un variable aléatoire, et sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_E h(x)\,d\mathbb{P}_X(x)$$

[CR] 36 Def 19 : Soit $k\in\mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, on appelle moment d'ordre k de X la quantité $\mathbb{E}[X^k]$.

Prop 20 : $\forall (p,q)\in[1,+\infty[,\ p<q,\quad L^\infty\subseteq L^q\subseteq L^p\subseteq L^1$, et $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_1$ où $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]$.

[CR] 36 Thm 21 (méthode de la fonction muette) : La connaissance de $\mathbb{E}[h(X)]$ pour toute h continue bornée ou mesurable positive caractérise la loi de X. Plus précisément, si pour toute h continue bornée ou mesurable positive, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_E h\,d\mu$, alors $\mu = \mathbb{P}_X$.

B - Fonction de répartition

Def 22 : Si X est réelle, alors la fonction $F_X : t\longmapsto \mathbb{P}(X\leq t)$ est appelée fonction de répartition de X. (Exemples en annexe) [CR] 23

Prop 23 : La fonction de répartition caractérise la loi.

Ex 24 : Si $U\sim\mathcal{U}([0,1])$, alors $\forall\lambda>0$, $\frac{-\ln(U)}{\lambda}\sim\mathcal{E}(\lambda)$.

Ex 25 (Box-Muller) : Si U et V sont indépendantes et de loi $\mathcal{U}([0,1])$, alors $\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V)\sim\mathcal{N}(0,1)$ et $\sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\sim\mathcal{N}(0,1)$ [CR] 167

Prop 26 : Soit $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall x>0$, $\mathbb{P}(X>x)>0$, et sans mémoire, i.e. $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$, $\mathbb{P}(X>x+y\mid X>y) = \mathbb{P}(X>x)$.
Si X est discrète, alors $X\sim\mathcal{G}(p)$ $(p\in]0,1[)$, et si X est à densité, alors $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda>0)$.

Prop 27 : $F_X:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ est croissante, càdlàg (i.e. en tout point admet une limite à droite et est continue à gauche) et $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$.
Si $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ vérifie les propriétés ci-dessus, alors on dira que F est une fonction de répartition.

Prop 28 : La hauteur du saut de $\mathcal{C}_{F_X}$ en $a\in\mathbb{R}$ vaut $\mathbb{P}(X=a)$, i.e.

$$\forall a\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(X=a) = F_X(a) - F_X(a^-)$$ (Illustration en annexe)

Prop 29 : Si F_X est continue et C^1 par morceaux, alors X admet une densité f_X telle que $f_X = F_X'$ en tout point de dérivabilité de F_X.

Def 30 : L'inverse généralisé d'une fonction de répartition $F:\mathbb{R}\to]0,1[$ est : [CR] 24

$$F^- : \begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \inf\{x\in\mathbb{R}\mid F(x)\geq u\} \end{array}$$

[CR] 24 **Prop 31** : Si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est une fonction de répartition, alors il existe une unique probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que F est la fonction de répartition de μ, i.e. $\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \mu(]-\infty, t])$.

[CR] 24 **Prop 32** : Si μ est une probabilité de fonction de répartition F, et si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $X = F^{-1}(U) \sim \mu$.

C - Fonction caractéristique

[CR] 43 **Def 33** : On suppose que $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On appelle fonction caractéristique de X la fonction
$$\varphi_X : \begin{array}{ccc} t \in \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}[e^{i\langle t, x\rangle}] \end{array}.$$

Prop 34 : La fonction caractéristique caractérise la loi.

[CR] 160 **Ex 35** : Si $X \sim \mathcal{N}_d(m, \Gamma)$, alors $\varphi_X(t) = e^{i\langle t, m\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma t, t\rangle}$

[CR] 44 **Prop 36** : $X \in L^k \Rightarrow \varphi_X$ est k fois dérivable en 0. Le cas échéant, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$

[CGC DM] 82 121 162 **DEV 1** : Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$, et $\mathbb{E}[X^n] = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{\lambda^n}$.

Cor 37 : Si X est bornée, alors les moments de X caractérisent sa loi.

Prop 38 : φ_X est continue et tend vers 0 à l'infini.

[CR] 45 **Prop 39** : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si, et seulement si $\varphi_{(X_1,\dots,X_n)} = \varphi_{X_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{X_n}$. Si $(X_1, \dots, X_n)$ est à densité, alors $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si, et seulement si $f_{(X_1,\dots,X_n)}$ est à variables séparables (auquel cas $f_{(X_1,\dots,X_n)} = f_{X_1} \cdots f_{X_n}$).

D - Fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

Dans ce paragraphe, $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

[CR] 41 **Def 40** : La fonction génératrice de X est la fonction $G_X : t \mapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) t^n$.

[CR] 41 **Prop 41** : G_X est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Cor 42 : La fonction génératrice caractérise la loi.

Rq 43 : $\varphi_X(t) = G_X(e^{it})$

Thm 44 : X admet un moment d'ordre p si, et seulement si G_X est p fois dérivable en 1. Le cas échéant, $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)]$. [CR] 42

Prop 45 : Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ [CR] 42

III - Théorème central limite

Thm 44 (Théorème central limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d de carré intégrable. On pose $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. [B] 207

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

DEV 2

Ex 45 : Soient $p \in]0,1[$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de $\mathcal{B}(p)$. Soit $\alpha \in]0,1[$. Un intervalle au niveau de confiance asymptotique $1-\alpha$ est donné par : [B] 207

$$\left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}},\ \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right]$$

où $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ et $q_{1-\alpha/2}$ est le $1-\frac{\alpha}{2}$ quantile de la $\mathcal{N}(0,1)$.

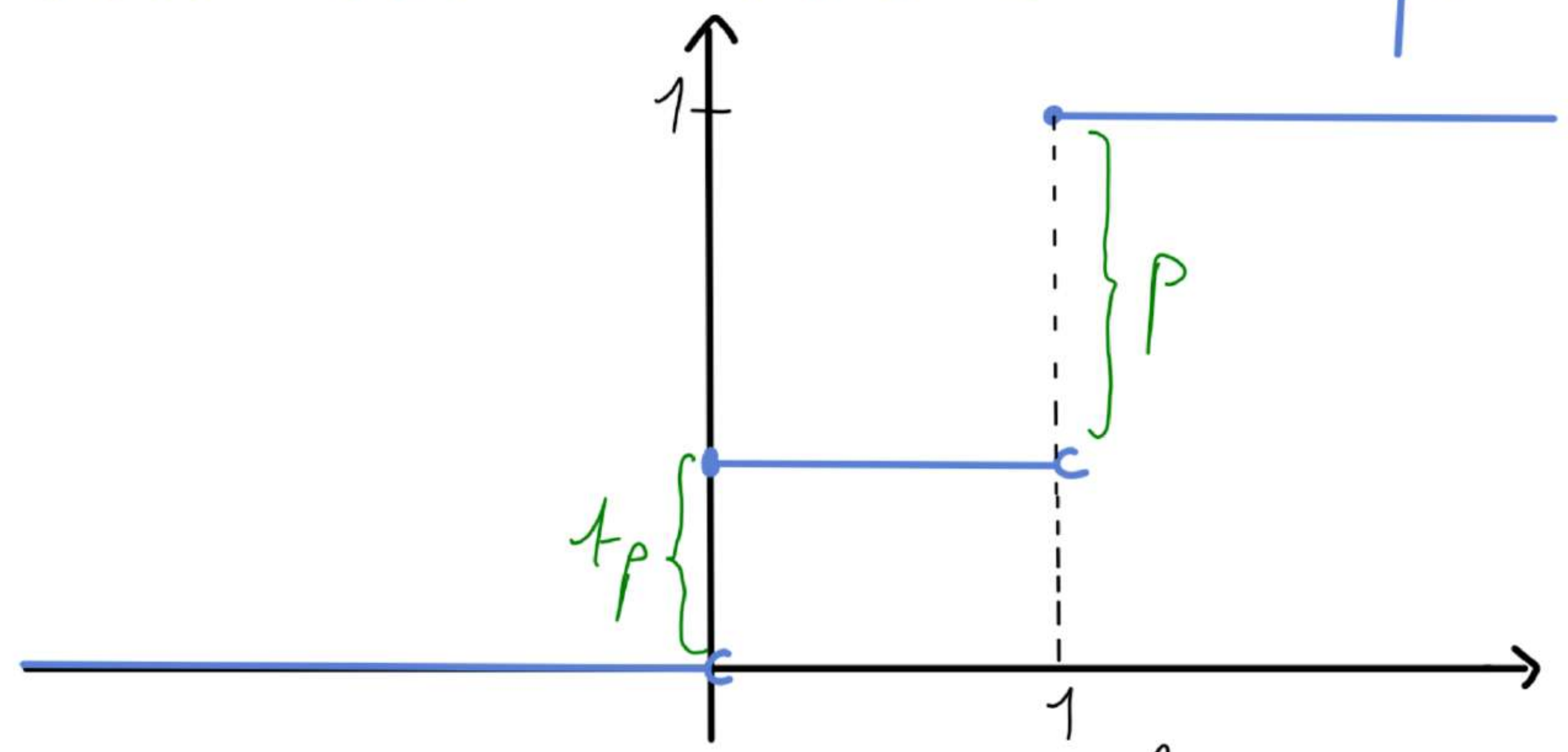
RÉFÉRENCES

[CR] : Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques (Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch)

[B] : Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J. & L. Bernis)

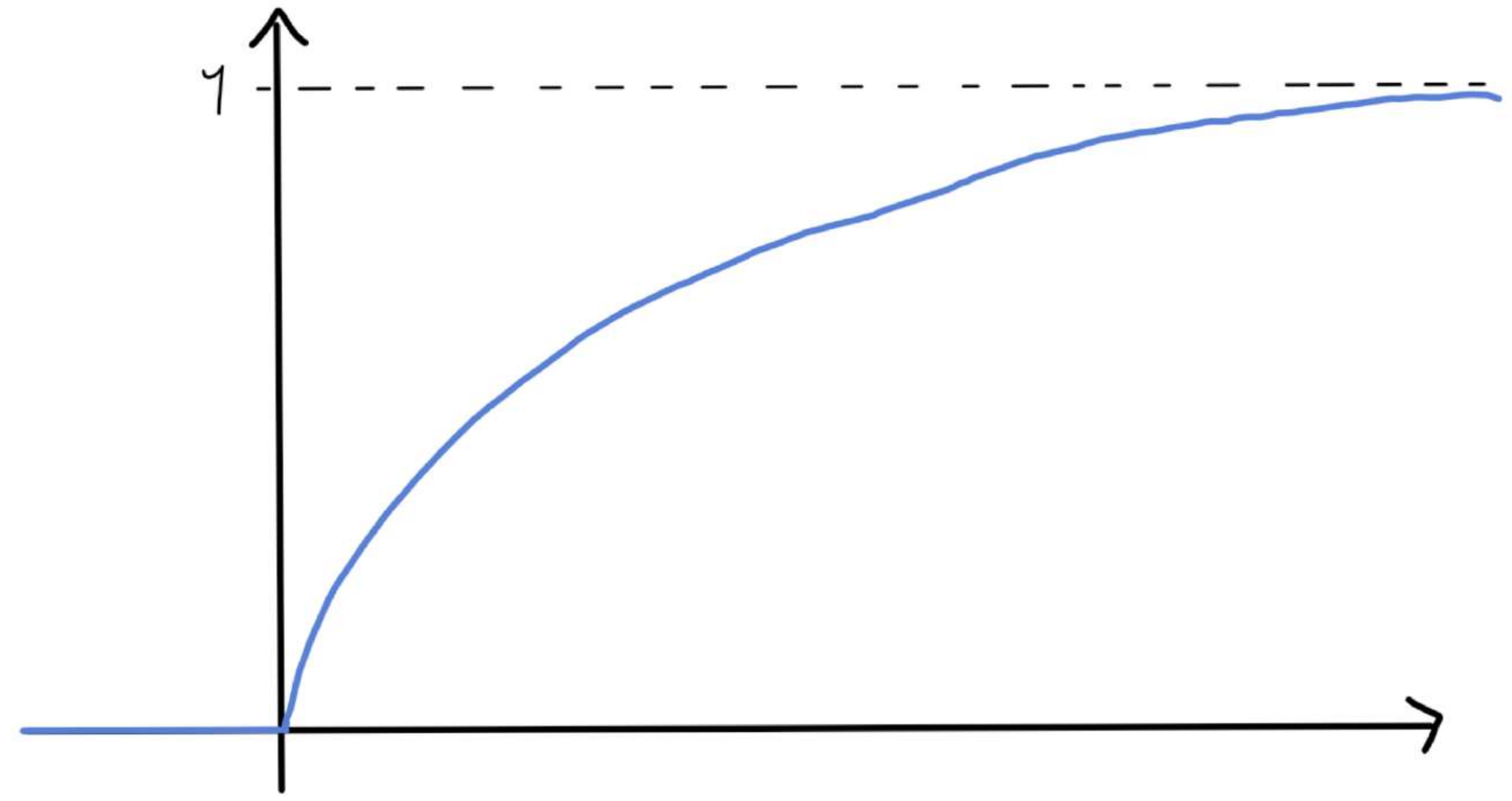
[CGC DM] : Exercices de probabilités (Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre)

ANNEXE : Fonctions de répartition



→ Hauteur du saut en x = $\mathbb{P}(X=x)$

Fonction de répartition d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$



Fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$