253

Utilisation de la notion de convexité en analyse

I - Convexité d'une fonction, d'un ensemble

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A une partie non vide de E, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

[Go] 51 **Def 1** : Pour $(a,b) \in E^2$, on note $[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda) b \ : \ \lambda \in [0,1]\} = [b,a]$.
On dit que A est convexe si $\forall (a,b) \in A^2$, $[a,b] \subseteq A$.

[Go] 51 **Ex 2** :
- Un espace vectoriel est convexe.
- Une boule est convexe.
- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

On suppose désormais A convexe.

[Rb] 225 **Def 3** : On dit que f est convexe si :
$$\forall (a,b) \in A^2, \ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$
On dit que f est strictement convexe si :
$$\forall (a,b) \in A^2, \ \forall \lambda \in]0,1[, \quad a \neq b \Rightarrow \quad f(\lambda a + (1-\lambda) b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Rq 4 : Si f est convexe, alors : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i)$.

[Rb] 225 **Prop 4** : f est convexe si, et seulement si son épigraphe $\{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$ est convexe.

[Rb] 232 236 238 **Thm 5** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. Sont équivalentes :
- f est convexe
- $\forall a \in I$, $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$
- $\forall (a,b,c) \in I^3$, $a < b < c \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$
- (Si f est dérivable) $\forall a \in I$, $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$
- (Si f est dérivable) f' est croissante sur I
- (Si f est deux fois dérivable) $f'' \geqslant 0$ sur I

Ex 6 : Fonctions usuelles convexes : $\exp$, $-\ln$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}$, $-\sqrt{\cdot}$, $-\sin_{|[0,\frac{\pi}{2}]}$.

Thm 7 : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Les assertions suivantes sont équivalentes : [Rv] 127 329 [Rb] 237
- f est convexe
- $\forall (u,v) \in U^2$, $f(u) - f(v) \geqslant df(u)(v-u)$
- $\forall (u,v) \in U^2$, $\langle \nabla f(u) - \nabla f(v) \mid u - v \rangle \geqslant 0$
- (Si f est de classe C^2) $\forall (u,v) \in U^2$, ${}^t v \, \nabla^2 f(u) \, v \geqslant 0$

Thm 8 (de Bohr-Mollerup) : Γ est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\ln \circ \Gamma$ est convexe, $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$. [Rb] 366

DEV 1

II - Inégalités découlant de la convexité

A - Inégalités pour des familles de réelles

[Rb] 239

Ex 9 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$. Application : lemme de Borel-Cantelli.

Ex 10 : $\forall x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Application :

Ex 11 : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi} x$. Application :

Prop 12 (inégalité arithmético-géométrique) :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$
(Application :

Prop 13 (inégalité de Hölder) : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $\forall (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $\forall (p,q) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
(Application :

B- Inégalités en théorie de l'intégration

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[BP] 159 Thm 14 (inégalité de Hölder) :
$$\forall f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu),\quad \forall g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu),\quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Cor 15 : Si $\mu(\Omega) < +\infty$, alors $\forall p' > p$, $L^{p'} \subseteq L^p$

[BP] 132 Thm 16 (inégalité de Jensen) : Si $\mu(\Omega) = 1$, alors pour toute $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, pour tout $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\varphi\left(\int_\Omega f \, d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi \circ f \, d\mu$.

[CR] 56 Appli 17 : Loi des grands nombres, cas L^4.

III - Convexité et optimisation...

A - ... dans un espace de Hilbert : la projection sur un convexe fermé et ses conséquences

Soient $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $C \subseteq \mathcal{H}$ un convexe non vide fermé, et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$.

[HL] 91 Thm 18 (de projection sur un convexe fermé) : FIGURE 1 DEV 2
$$\forall x \in \mathcal{H},\quad \exists!\, P_C(x) \in C : \quad \|x - P_C(x)\| = d(x, C) =: \inf_{y \in C} \|x - y\|$$
De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x) | x - y \rangle) \leq 0$

Dans le cas de F, le projeté $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$.

[HL] 92-93 Cor 19 : P_C est 1-lipschitzienne, P_F est un projecteur orthogonal de norme 1.

Cex 20 : C'est faux si $\mathcal{H}$ est seulement de Banach : dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, tous les $(x, 0)$, $-1 \leq x \leq 1$ réalisent $d\left(\binom{0}{1}, \mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}\right)\right)$.

Cor 21 : $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$ (et $\mathcal{H} = \overline{F} \oplus F^\perp$ si F n'est pas supposé fermé). [HL] 93

Cex 22 : C'est faux si F n'est pas fermé : dans $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, pour $F = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on a $F^\perp = \{0\}$ mais $\mathcal{H} = F \oplus \{0\} = F$.

Cor 23 :
- $F = F^{\perp\perp}$, [HL] 94
- Pour tout sev G de $\mathcal{H}$, $\overline{G} = \mathcal{H} \iff G^\perp = \{0\}$. DEV 2 93

Thm 24 (de représentation de Riesz) : $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$, $y \longmapsto \langle \cdot | y \rangle$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, i.e. une isométrie linéaire surjective. [HL] 96

Appli 25 :
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$, appelé *produit vectoriel* de x et y, tel que $[x, y, \cdot] = \langle \cdot | x \wedge y \rangle$ où $[\cdot, \cdot, \cdot]$ est le produit mixte. [Bu] 501
- Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$. Il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ appelé *gradient de f en a*, tel que $df(a) = \langle \cdot | \nabla f(a) \rangle$. [Go] 304

Def 26 : Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2$, $\langle Tx | y \rangle = \langle x | T^* y \rangle$. On l'appelle *adjoint* de T. [HL] 97

On dit que T est *auto-adjoint* si $T = T^*$.

B - ... des fonctions différentiables

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable et $a \in U$.

Def 27 : On dit que a est un *point critique* si $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$. [Go] 335-336

Prop 28 : Si f est convexe et admet un minimum local, alors c'est un minimum global. Si f est de plus strictement convexe, alors ce minimum est unique. [BMP] 30

Ex 29 : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est le minimum global de $J : x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax | x \rangle - \langle b | x \rangle$. [BMP] ~30

IV - Convexité dans les espaces vectoriels normés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

[Rv] 20 **Prop 30**: Toute boule fermée est convexe.

[Rv] 20 **Def 31**: Soit $C \subseteq E$ un convexe non vide contenant 0_E.
La jauge de C est $j_C : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in C\} \end{array}$.

Lemme 32: La jauge de C est bien définie sur E, et vérifie :

1. $C = \{x \in E \mid j_C(x) < 1\}$
2. $\forall x \in E, \forall \mu > 0, \quad j_C(\mu x) = \mu \, j_C(x)$ (positive homogénéité)
3. $\forall (x,y) \in C^2, \quad j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$ (sous-additivité)

Def 33: Soit $A \subseteq E$ non vide. On définit $\mathrm{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ convexe}}} C$ l'enveloppe convexe de A.

[Go] 54 **Thm 34** (de Carathéodory): Supposons que $\dim(E) < +\infty$, posons $n = \dim(E) - 1$.
Soit $A \subseteq E$ non vide. Tout élément de $\mathrm{Conv}(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de $n+1$ points de A.

Références

- [Rv]
- [HL]
- [Rb]
- [Go]

FIGURE 1 : Fonctions convexes, caractérisations

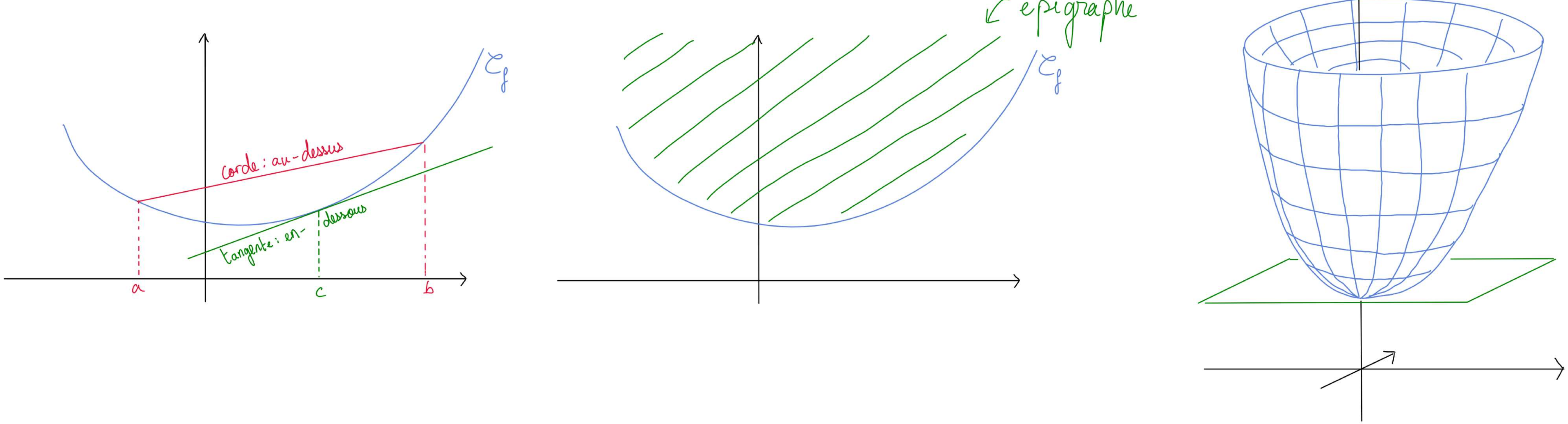

FIGURE 2 : Projection sur un convexe fermé

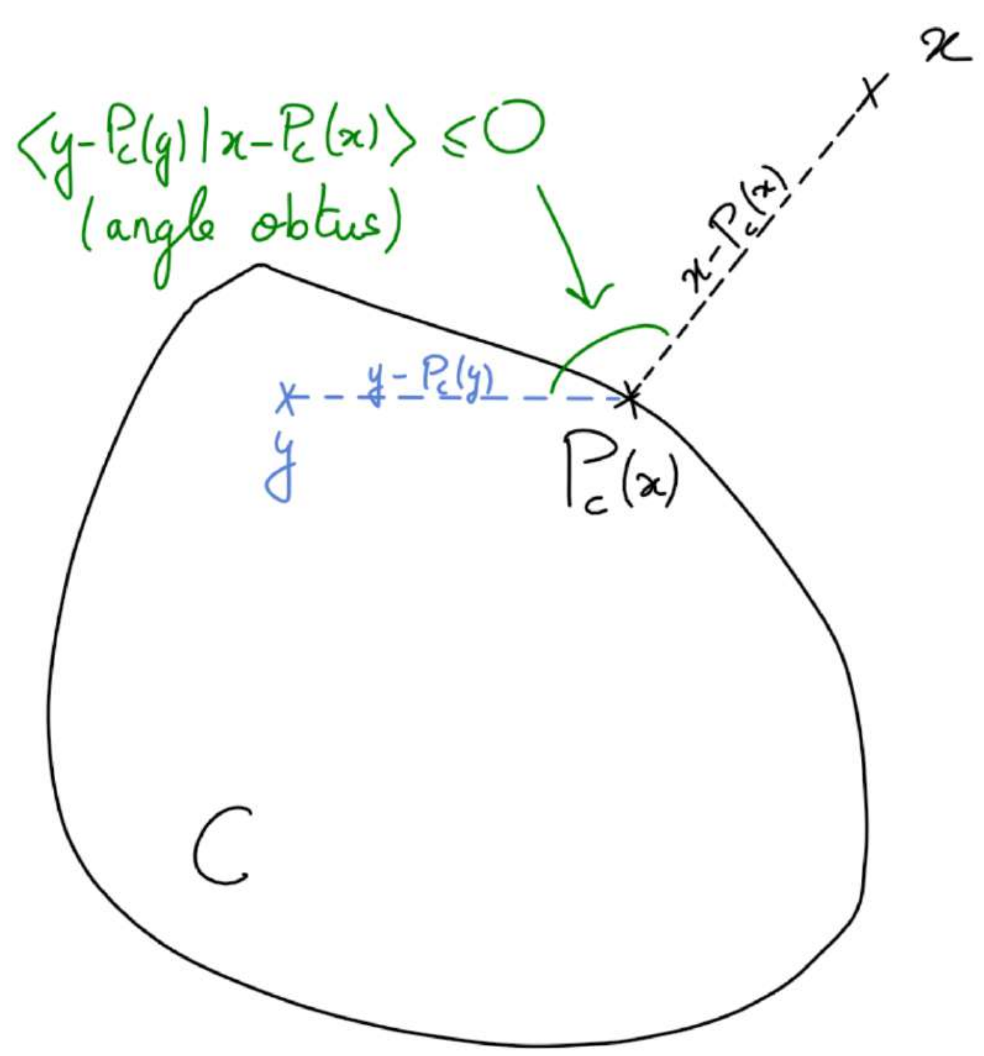

FIGURE 3 : Jauge d'un convexe