250 Transformation de Fourier. Applications.

# I - Transformée de Fourier de fonctions intégrables

## A - Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

[F] 130 **Def 1** : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de $f$ :

$$\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

La transformation de Fourier est l'application $\mathcal{F} : f \longmapsto \hat{f}$.

[F] 130 **Ex 2** :
- $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) = 2\operatorname{sinc}(\xi)$
- $\forall c>0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}[x \mapsto e^{-c|x|}] = \frac{2c}{c^2+\xi^2}$
- Pour $\sigma > 0$, on pose $g_\sigma : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g_\sigma}(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$.

[F] 106 **Lemme 3** (de Riemann-Lebesgue) : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

[F] 131 **Thm 4** : $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire (continu) de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ de norme 1.

Notation : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\check{f} : x \mapsto f(-x)$.

[F] 131 **Thm 5** : $\mathcal{F}$ est un morphisme de l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ dans l'algèbre multiplicative $C_0(\mathbb{R})$.

[EA] ~112 **Prop 6** : Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}[x \mapsto f(ax+b)] = e^{-ib\xi} \cdot \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$

**Ex 7** :
- $\forall a>0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(\xi) = \mathcal{F}[x \mapsto \mathbb{1}_{[-1,1]}(\frac{x}{a})](\xi) = 2a \operatorname{sinc}(a\xi)$

[F] ~130
- $\forall m \in \mathbb{R}$, $\forall \sigma>0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2)] = e^{-i\xi m} e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$.

**Prop 8** : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, soit $k \in \mathbb{N}$.
- Si $x \mapsto x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est $k$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}^{(k)}(\xi) = (-i)^k \mathcal{F}[x \mapsto x^k f(x)](\xi).$$
- Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ et si $f^{(k)} \in L^1$, alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$.

En particulier, $\hat{f}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{=} o\left(1/|\xi|^k\right)$.

[F] 133 **Thm 9** (Formule d'inversion) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
On a $\| f - \frac{1}{2\pi} \check{\hat{\hat{f}}} \|_1 = 0$. En particulier, si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $f = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{\hat{f}}}$

**Thm 10** : $\mathcal{F}$ est injective, et [admis] non surjective. [F] 133

**Ex 11** : Soit $c>0$. On a $f : x \mapsto e^{-c|x|} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f} : \xi \mapsto \frac{2c}{c^2+\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$, [F] ~130
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\hat{f}}(x) = \pi e^{-c|x|}$.

## B - Extension à $L^2(\mathbb{R})$

DEV 1

[F] 137 **Thm 12** (de Plancherel) : Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|\hat{f}\|_2$.
En particulier, $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})] \subseteq L^2(\mathbb{R})$, et cette partie est dense. [EA] 122

**Thm 13** : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme (toujours noté $\mathcal{F}$) de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, appelé transformation de Fourier-Plancherel.

**Prop 14** :
- $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi \cdot \check{id}_{\mathbb{R}}$
- $\forall (f,g) \in L^2(\mathbb{R})^2$, $\hat{f} * \hat{g} = \widehat{fg}$ [EA] 128

**Rq 15** : Méthode de calcul : $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f] = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}[f \mathbb{1}_{[-n,n]}]$

**Prop 16** (Formule d'inversion) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.
On a $\| f - \frac{1}{2\pi} \check{\hat{\hat{f}}} \|_2 = 0$. En particulier, si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $f = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{\hat{f}}}$ [EA] ~130

**Ex 17** : $\mathbb{1}_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $2\operatorname{sinc} = \widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}} \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\widehat{\operatorname{sinc}} = \pi \mathbb{1}_{[-1,1]}$. [EA] ~131

# II - Transformation de Fourier dans la classe de Schwarz

## A - Bijectivité de la transformation de Fourier

**Def 18** : La classe de Schwartz est l'ensemble $S(\mathbb{R})$ des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que : [EA] 134

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists M_{p,n} > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^n f^{(p)}(x)| \leq M_{p,n}$$

**Ex 19** : $\forall \sigma > 0$, $g_\sigma \in S(\mathbb{R})$.

**Prop 20** :
- $S(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $L^p(\mathbb{R})$ (pour tout $p \geq 1$). [EA] 134-135

En particulier :
- $\mathcal{F}$ est bien définie sur $S(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{F}$ échange convolution et multiplication.

- $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $f' \in S(\mathbb{R})$, $x \mapsto x f(x) \in S(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$

[EA] 135 Cor 21 (formule d'inversion) : $\forall f \in S(\mathbb{R}),\ f = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{\hat{f}}}$.

[EA] 135 Thm 22 : $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $S(\mathbb{R})$.

Ex 23 : Résolution d'équations différentielles dans $S(\mathbb{R})$ :

$$\{f \in S(\mathbb{R}) \mid f^{(4)} + f'' = 1\} = \{f \in S(\mathbb{R}) \mid \forall \xi \in \mathbb{R},\ (i\xi)^4 \hat{f}(\xi) + (i\xi)^2 \hat{f}(\xi) = 1\}$$

$$= \{f \in S(\mathbb{R}) \mid \forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\xi^4 - \xi^2}\} = \{x \mapsto \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\xi \mapsto \frac{1}{\xi^4 - \xi^2}]\}$$

## B - Application : échantillonnage d'un signal

Dans ce paragraphe, on adopte la convention $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\omega t} dt$.

Nouvelle formule d'inversion : $f = \check{\hat{\hat{f}}}$.

Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Le symbole $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ désigne $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N}$.

[Bê] 253 Thm 24 (formule sommatoire de Poisson) : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n t}$.

Thm 25 (critère de Nyquist-Shannon et formule de restitution) :
S'il existe $F > 0$ tel que $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-F, F]$, et si $2F \leq 1$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(n-t))$$

DEV 2

Références
[EA]
[CR]
[F]
[Bê]

## III - La transformée de Fourier en probabilités : la fonction caractéristique

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mu$ une loi sur $\mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ de loi $\mu$.

Def 26 : La fonction caractéristique de $X$ est $\varphi_X : t \longmapsto \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X(x)$. [CR] 43

Prop 27 : La fonction caractéristique caractérise la loi. On parlera donc de la fonction caractéristique $\varphi_\mu$ d'une loi $\mu$. [CR] 43

Rq 28 : Si $X$ admet une densité $f$, alors $\varphi_X = \check{\hat{f}} = \hat{f}$.

Ex 29 : Soient $c > 0$ et $\varphi : x \mapsto e^{-c|x|}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(t) = \frac{2c}{c^2 + t^2}$, donc la fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$ est : [F] ~130

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{\varphi}}(-t) = \varphi(t).$$

Ex 30 : ▸ $\forall m \in \mathbb{R},\ \forall \sigma > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(t) = e^{itm} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$ [F] 133

▸ $\forall \lambda > 0,\ \forall a > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{\Gamma(a,\lambda)}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$ (Rq : $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1,\lambda)$)

▸ $\forall a > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{\mathcal{U}([-a,a])}(t) = \mathrm{sinc}(ta)$. [F] ~130

Thm 31 (de Lévy) [admis] : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)$. [CR] 57

Thm 32 (central limite) : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires identiques, indépendantes, admettant une espérance $m$ et une variance $\sigma^2$. [CR] 62

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{où} \quad \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$