246

Séries de Fourier. Exemples et applications.

I - Coefficients de Fourier

A - Notations pour cette leçon

- $C^0_{2\pi}$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques.
- Pour $p\in[1,+\infty[$, $L^p_{2\pi} = L^p(\mathbb{T},\mathcal{B}(\mathbb{T}),\frac{\lambda}{2\pi})$ où $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
- Sur $L^2_{2\pi}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle : (f,g)\longmapsto \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\frac{dt}{2\pi}$ est un produit scalaire hermitien.
- Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit $e_\lambda : t\in\mathbb{R}\longmapsto e^{i\lambda t}$, de même que $\cos_\lambda : t\in\mathbb{R}\longmapsto \cos(\lambda t)$ et $\sin_\lambda : t\longmapsto \sin(\lambda t)$.

B - Coefficients de Fourier

[EA] 171 **Lemme 1** : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique. Pour tout $a\in\mathbb{R}$,
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

[Go] 268 [EA] 173 **Def 2** : Pour $f\in L^1_{2\pi}$ et $n\in\mathbb{Z}$, on définit le n^e coefficient de Fourier de f par :
$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}\,\frac{dt}{2\pi}$$
On définit également $a_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\frac{dt}{2\pi}$ et $b_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\frac{dt}{2\pi}$.

[Go] 269 [EA] 177 **Prop 3** : $a_n(f)=\frac{c_n(f)+c_{-n}(f)}{2}$, $b_n(f)=\frac{c_n(f)-c_{-n}(f)}{2i}$, $c_{\pm n}(f)=a_n(f)\pm i\,b_n(f)$

[Go] 269 [EA] 178 **Def 4** : Pour $f\in L^1_{2\pi}$, on définit la série de Fourier de f comme la série de somme partielle $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n = a_0(f)+2\sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos_n + b_n(f)\sin_n$, $N\in\mathbb{N}$.
(Un élément de $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}})=\mathrm{Vect}(\{\cos_n,\sin_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ est appelé polynôme trigonométrique)

[Go] 269 [EA] 177 **Prop 5** : Soit $f\in C^0_{2\pi}$. Si f est paire (resp. impaire), alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n(f)=0$ (resp. $a_n(f)=0$).

[EA] ~176 +225 **Ex 6** : Pour f définie par $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $f(x+2k\pi)=x^2$, on a $a_0(f)=\frac{\pi^2}{3}$,
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n(f)=\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

Lemme 7 (de Riemann-Lebesgue) : $\forall f\in L^1_{2\pi}$, $c_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ [EA] 109

Prop 8 : Soit $n\in\mathbb{Z}$, soit $a\in\mathbb{R}$. [EA] 175
- Si $f\in C^1_{2\pi}$, alors $c_n(f')=in\,c_n(f)$.
- Si $f\in L^1_{2\pi}$, alors $c_n(t\longmapsto f(t+a)) = e^{ina}c_n(f)$

II - Résultats de convergence

A - Convolution périodique

Def 9 : Pour f et g dans $L^1_{2\pi}$, l'application $f*g : x\longmapsto\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\frac{dt}{2\pi}$ est appelée convolée $f*g$ (elle est bien définie pour presque tout x). [EA] 174

Prop 10 : [EA] ~80 174
- $\forall (f,g)\in(L^1_{2\pi})^2$, $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_1$ (inégalité de Young)
- $\forall f\in L^1_{2\pi}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $f*e_n = c_n(f)e_n$

Def 11 : Une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(L^1_{2\pi})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité périodique si : [EA] ~86
1. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\geqslant 0$
2. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|\alpha_n\|_1=1$
3. $\forall\delta>0$, $\int_{\pi\geqslant|x|>\delta}\alpha_n(x)\,dx\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Thm 12 : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité périodique, soit $f\in(E,\|\cdot\|)$ avec $(E,\|\cdot\|)=(C^0_{2\pi},\|\cdot\|_\infty)$ ou $(E,\|\cdot\|)=(L^p_{2\pi},\|\cdot\|_p)$ $(1\leqslant p<+\infty)$. [EA] 87
$$\|\alpha_n*f-f\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

B - Approximation ponctuelle

Def 13 : Soit $N\in\mathbb{N}$. On appelle N^e noyau de Dirichlet l'application : [EA] 184
$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$$

Prop 14 : Soit $N\in\mathbb{N}$. 1. D_N est pair 2. $\|D_N\|_1=1$ [EA] 184

3▸ $\forall f \in L^1_{2\pi}$, $D_N * f = S_N(f)$ 4▸ $\forall x \in \mathbb{R}$, $D_N(x) = \dfrac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

[EA] 196 **Thm 15** (de Dirichlet) : Soient f C^1 par morceaux 2π-périodique et $x \in \mathbb{R}$.

$$S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si f est de plus continue, alors f est somme de sa série de Fourier.

[Go] 275 **Rq 16** : Soit f définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left((2^{n^3}+1)\frac{x}{2}\right)$.
Alors f est continue, mais sa série de Fourier diverge en 0.

Ex 17 : La fonction de Ex 6 est somme de sa série de Fourier : pour $x = \pi$, on en déduit la valeur $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

B- Approximation uniforme

[EA] 185 **Def 18** : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle N^e noyau de Fejér l'application :

$$K_N = \frac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N}$$

[EA] 185-186 **Prop 19** : Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1▸ $K_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$

2▸ $\|K_N\|_1 = 1$ 3▸ $\forall \delta > 0$, $\displaystyle\int_{\pi \geq |t| \geq \delta} K_N(t)\,dt \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

4▸ $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité périodique.

Notation 20 : Pour $N \geq 1$ et $f \in L^1_{2\pi}$, on note $\sigma_N(f) = \dfrac{S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f)}{N}$ la moyenne de Cesàro de $(S_N(f))_N$. [EA] 181

Thm 21 (de Fejér) : Soit $f \in C^0_{2\pi}$. [EA] 190

1▸ $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ 2▸ $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Même résultat pour $f \in L^p_{2\pi}$ avec $\|\cdot\|_p$.

Cor 22 : $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ est dense dans $(C^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$. [EA] 192

Cor 23 : Soit $f \in C^0_{2\pi}$. [EA] 194 198

- Si $(S_N(f)(x))_N$ converge, alors c'est vers $f(x)$.
- Si $(c_n(f))_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors f est la somme de sa série de Fourier.

Def 24 : L'application $\mathcal{F} : f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est appelée transformation de Fourier périodique.

Thm 25 : ▸ $\mathcal{F}$ est injective sur $C^0_{2\pi}$ [EA] 195

▸ $\mathcal{F}$ est injective sur $L^1_{2\pi}$, i.e. $\forall (f,g) \in (L^1_{2\pi})^2$, $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g] \iff f = g$ p.p.

C- Vitesse de convergence

Prop 26 : ▸ Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^k_{2\pi}$, alors $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ [EA] 201 202

▸ Soit $k \geq 2$. Si $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$, alors $f \in C^{k-2}_{2\pi}$.

III - Théorie L^2 des espaces de Hilbert

Thm 27 : $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Cor 28 : $\forall f \in L^2_{2\pi}$, $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ [EA] 193

Cor 29 (Parseval) : $\forall f \in L^2_{2\pi}$, $\|f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ [EA] 193

Ex 30 : Avec la fonction de Ex 6 et la formule de Parseval, on montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Cor 31 : $\mathcal{F}$ est une isométrie entre $L^2_{2\pi}$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

[EA] 195 **Cor 32** : Si $f \in C^0_{2\pi}$ est C^1 par morceaux, alors $(S_N(f))_N$ converge normalement vers f.

IV - Applications des séries de FOURIER...

A - ... au calcul de sommes de séries

[FGN] 910 **Thm 33** : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de BERNOULLI, i.e. l'unique suite vérifiant $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ pour z proche de 0.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

DEV 1

B - ... aux équations différentielles

[Bé] 92 **Thm 34** (équation de la chaleur) : Soit $u_0 \in L^2_{2\pi}$ de transformée de Fourier $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Il existe une unique $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall t > 0$, $u(t,\cdot)$ est périodique ;
- $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont bien définies ;
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
- $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} u_0$ dans L^2.

De plus, u est lisse.

C - ... à la théorie du signal

Thm 35 (formule de POISSON) : $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n t}$ [Bé] 253

Thm 36 (d'échantillonnage de SHANNON) : Soit $f \in S(\mathbb{R})$, supposons $\hat{f}$ nulle en-dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \operatorname{sinc}(\pi(n-t))$ où sinc est la fonction sinus cardinal.

DEV 2

RÉFÉRENCES

[EA]

[Go]

[FGN]

[Bé]