245

Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Posons $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

I - Régularité des fonctions de la variable complexe

A- Les fonctions analytiques et leurs propriétés

[T] 40 50 Def 1 : ▸ On dit que f est développable en série entière au voisinage de $z_0 \in \Omega$ s'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r>0$ tels que $B(z_0,r) \subseteq \Omega$ et $\forall z \in B(z_0,r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

▸ On dit que f est analytique sur Ω si f est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω. On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

[T] 50 Ex 2 : ▸ $\forall z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\forall z \in B(z_0, \frac{|z_0|}{2})$, $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z_0^{n+1}} (z-z_0)^n$: $z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^*)$

▸ Les fonctions polynomiales sont analytiques sur $\mathbb{C}$; exp est analytique sur $\mathbb{C}$.

[T] 50 Prop 3 : $\mathcal{A}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre

[T] ~50 Prop 4 : Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ pour $z_0 \in B(z_0,R) \subseteq \Omega$, alors f est analytique sur $B(z_0,R)$. Plus précisément, le rayon de convergence du développement en série entière de f en $z_1 \in B(z_0,R)$ est au moins $R - |z_1 - z_0|$.

[T] 39 Def 5 : On dit que f est dérivable en $z_0 \in \Omega$ si $f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.
On définit $f^{(n)}$ de la même manière, à l'image des fonctions de la variable réelle.

[T] 40 Thm 6 : Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ au voisinage de z_0, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

[T] 52 Thm 7 (principe du prolongement analytique) : Si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, alors pour tout $z_0 \in \Omega$,
$f = 0$ sur Ω $\Leftrightarrow$ $f = 0$ sur un voisinage de z_0 $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$.

[T] 52 Cor 8 : Soit $(f,g) \in \mathcal{A}(\Omega)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de Ω, alors $f = g$ sur Ω.

[T] 52-53 Thm 9 (principe des zéros isolés) : On pose $Z(f) := f^{-1}(\{0\})$. Si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, alors pour tout $K \subseteq \Omega$ compact, $Z(f) \cap K$ est fini.

Cor 10 : Soit $(f,g) \in \mathcal{A}(\Omega)$. S'il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ injective et convergente dans Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = g(z_n)$, alors $f = g$ sur Ω.

Prop/Def 11 : Soient $z_0 \in \Omega$, supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ au voisinage V de z_0. Il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ vérifiant les 3 conditions équivalentes : [T] 53

1▸ $p = \min \{ k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0 \}$

2▸ $f^{(p)}(z_0) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0,p-1]\!]$, $f^{(k)}(z_0) = 0$

3▸ $\exists g \in \mathcal{A}(V)$: $g(z_0) \neq 0$ et $\forall z \in V$, $f(z) = (z-z_0)^p g(z)$

L'entier p est appelé multiplicité de z_0.

B- Les fonctions holomorphes et leurs propriétés

Def 12 : On dit que f est holomorphe sur Ω si f est dérivable sur Ω. [T] 39
On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Ex 13 : Les fonctions de Ex 2 sont holomorphes sur les mêmes domaines.

Thm 14 (condition de Cauchy-Riemann) : Supposons f différentiable en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Sont équivalentes : [T] 59-60

1▸ f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$

2▸ $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$

3▸ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$

Le cas échéant, $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

Cor 15 : Supposons que Ω est connexe et que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. [T] 61
f est constante $\Leftrightarrow$ $|f|$ est constante $\Leftrightarrow$ u est constante $\Leftrightarrow$ v est constante
$\Leftrightarrow$ $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Thm 16 : $\mathcal{A}(\Omega) \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$. On verra avec la formule de Cauchy que la réciproque est vraie. [T] 50

II - Intégration des fonctions de la variable complexe

A - Intégrales curvilignes et formule de CAUCHY

Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ un chemin (i.e. un arc continu).

[T] 68 Def 17 : On définit l'intégrale de f le long de γ : $\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f\circ\gamma(t)\cdot\gamma'(t)dt$.

[T] 69 Prop 18 : Si $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ est un C^1-difféomorphisme, alors $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz$.

[T] 71 Def 19 : Supposons γ fermé (i.e. $\gamma(a)=\gamma(b)$). Soit $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. L'indice de z_0 par rapport à γ est $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$.

Ex 20 : Pour $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \longmapsto a+re^{i\theta}$, on a $\forall z_0 \in B(a,r)$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)=1$.

[T] 71 Thm 21 : Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$, et nulle sur la composante non bornée.

Appli 22 : Le théorème de JORDAN pour un lacet (i.e. chemin fermé) simple C^1.

[T] 72 Thm 23 : Si f est continue sur Ω, alors f admet une primitive si, et seulement si pour tout lacet γ de Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

[T] 74 Thm 24 (de GOURSAT) : Soit $z_0\in\Omega$, supposons que $f\in C^0(\Omega)\cap\mathcal{H}(\Omega\setminus\{z_0\})$. Pour tout triangle $\Delta\subseteq\Omega$, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

[T] 76 Thm 25 (de CAUCHY) : Si Ω est convexe, et si $f\in C^0(\Omega)\cap\mathcal{H}(\Omega\setminus\{z_0\})$, alors f admet une primitive sur Ω. En particulier, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

[T] 77 Thm 26 (formule de CAUCHY) : Si Ω est convexe, et si $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, alors pour tout lacet $\gamma : [a,b]\to\Omega$, on a $\forall z\in\Omega\setminus\gamma([a,b])$, $2i\pi\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(z)\cdot f(z) = \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$

[T] 77 Thm 27 : Soit $z_0\in\Omega\setminus\gamma([a,b])$, supposons que $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ et que γ est fermé

1▸ $f\in\mathcal{A}(\Omega)$

2▸ Si Ω est convexe, alors, $\forall n\in\mathbb{N}$, $2i\pi\times\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)\times\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

Rq 28 : En particulier, une fonction holomorphe est infiniment dérivable. La fonction $x\mapsto |x|$ admet une primitive, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0. [T] 78

Thm 29 (de LIOUVILLE) : Si $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est bornée, alors elle est constante. [T] 85

Thm 30 (de D'ALEMBERT-GAUSS) : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. [T] 85

Def 31 : On dit que f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω si : [T] 85

$$\forall B(a,r)\subseteq\Omega,\quad f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

Prop 32 Si $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, alors f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω. [T] 85

Thm 32 (principe du maximum local) : Si f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω, et si f est continue sur Ω, alors f est constante au voisinage des maxima relatifs de $|f|$. [T] 86

Thm 33 (principe du maximum global) : Si Ω est connexe et borné, et si $f\in\mathcal{H}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, alors $\sup_\Omega |f| = \max_{\partial\Omega}|f|$. [T] 86

B - Fonctions holomorphes définies par une intégrale dépendant d'un paramètre

Thm 34 (d'holomorphie sous le signe intégrale) : Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega\times X\longrightarrow\mathbb{C}$. Posons $F : z\in\Omega\longmapsto\int_X f(z,x)d\mu(x)$. Si : [T] 91

- ▸ $\forall x\in X$, $f(\cdot,x)\in\mathcal{H}(\Omega)$
- ▸ $\forall z\in\Omega$, $f(z,\cdot)\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$
- ▸ $\forall K\subseteq\Omega$ compact, $\exists g_K : X\longrightarrow\mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall z\in K, \forall x\in X$, $|f(z,x)|\leq g_K(x)$

alors F est bien définie et holomorphe sur Ω. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in\Omega$, $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)d\mu(x)$

[CGC DM] Ex 35 : Soient $a>0$, $\lambda>0$ et $X\sim\Gamma(a,\lambda)$. DEV 1

1▸ $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a$

2▸ $\forall t<\lambda$, $L(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$

3▸ $\forall n\in\mathbb{N}$, $m_n := \mathbb{E}[X^n] = a(a+1)\cdots(a+n-1)\lambda^{-n}$

C - Le théorème des résidus

[T] 137 **Def 36** : Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R$, on note $C(z_0, r, R) := B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$ la couronne associée à a, r et R.

[T] 137 **Thm 37** (formule de Cauchy dans une couronne) : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < \rho_1 < \rho_2 < R$, $f \in \mathcal{H}(C(z_0, r, R))$, $\gamma_1 : t \in [0, 2\pi] \longmapsto z_0 + \rho_1 e^{i\theta}$ et $\gamma_2 : t \in [0, 2\pi] \longmapsto z_0 + \rho_2 e^{i\theta}$.

$$\forall z \in C(z_0, \rho_1, \rho_2), \qquad 2i\pi \cdot f(z) = \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

[T] 138 **Cor / Def 38** : Il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dépendant de $C(z_0, r, R)$ telle que f admet le développement en série de Laurent :

$$\forall z \in C(z_0, r, R), \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

[T] 140 **Def 39** : Le coefficient a_{-1} est appelé résidu de f en z_0, et est noté $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$.

[T] 141 **Thm 40** (des résidus) : Supposons Ω convexe. Soit $\{z_1, \dots, z_r\} \subseteq \Omega$, supposons que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_r\})$ et que $\gamma([a, b]) \cap \{z_1, \dots, z_r\} = \emptyset$. Alors :

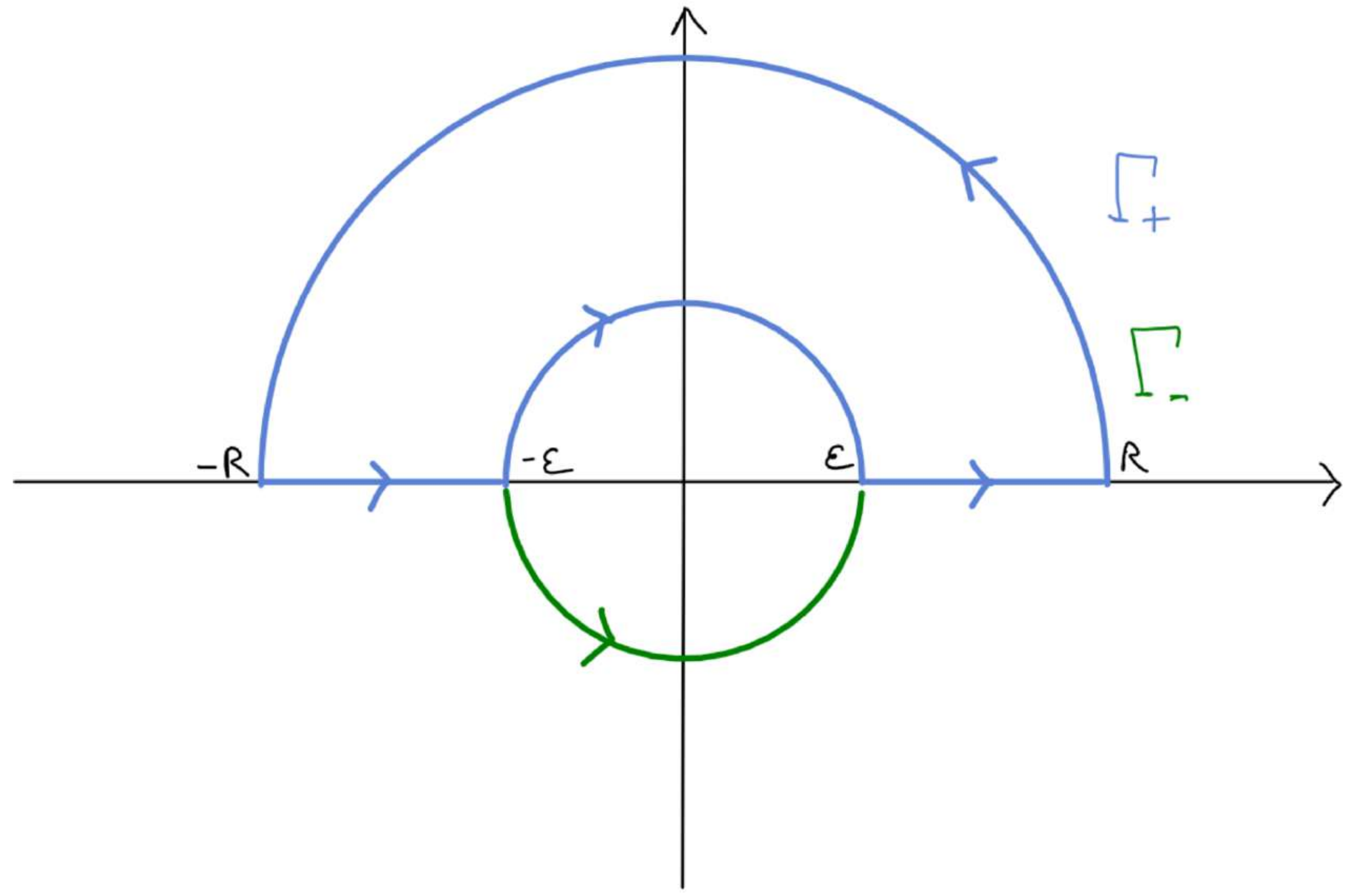
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_{z_k}(f) \times \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)$$

Ex 41 : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ DEV 2

Rq 42 : En choisissant un autre chemin, on peut parfois utiliser plus simplement le théorème de Cauchy.

[B] 259 **Ex 43** : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

FIGURE



Références

[T] Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*

[CGC DM] (DEV 1) Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre

[B] (Ex 43) Bernis

[ ] (DEV 2)