243 — Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites complexes.

I - Introduction à la notion de série entière

A- Notion de rayon de convergence

[G] 247 [EA] 231 **Def 1** : On appelle rayon de converge de $(a_n)_n$ le réel :

$$R(a_n) := \sup\{r>0 \mid (r^n a_n)_n \in \ell^\infty\}$$

[EA] 234 **Prop 2** : Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = F(n)$ où F est une fraction rationnelle sans pôle dans $\mathbb{N}$, alors $R(a_n)=1$.

Prop 3 : $R(a_n) = R(|a_n|) = R(na_n) = R\left(\frac{a_n}{n+1}\right) \overset{(\alpha\neq 0)}{=} R(\alpha a_n) \overset{(\forall p\in\mathbb{N})}{=} R(a_{n+p})$

[EA] 234 **Prop 4** : Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leq|b_n|$, alors $R(a_n)\geq R(b_n)$. Si $a_n = O(b_n)$ alors $R(a_n)\geq R(b_n)$.
Si $a_n \sim b_n$, alors $R(a_n) = R(b_n)$.

[EA] 236 **Prop 5** : $R(a_n+b_n) \geq R(a_n)+R(b_n)$ avec égalité si $R(a_n)\neq R(b_n)$.

[EA] 236 **Prop 6** : $\forall z\in\mathbb{C}$, $\begin{cases} |z|<R(a_n) \Rightarrow \sum_n a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z|>R(a_n) \Rightarrow \sum_n a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}$

B- Calcul effectif de rayons de convergence

[EA] 232 **Prop 7** (Règle de D'Alembert) : Si $(a_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $1/R(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ lorsque la limite existe dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

[EA] 233 **Prop 8** (Règle de Cauchy) : $1/R(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ lorsque la limite existe dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

[EA] 233 **Prop 9** (Formule de Hadamard) : $1/R(a_n) = \limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ (toujours définie)

[G] 248 **Prop 10** : Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow L \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors $|a_n|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow L$.

En un sens : D'Alembert $\Rightarrow$ Cauchy $\Rightarrow$ Hadamard.

Cex 11 : La réciproque est fausse : considérer $a_n = (2+(-1)^n)2^n$

Ex 12 : $R(e^{n\cos(n)}) = 1/\limsup\limits_{n\to+\infty} |e^{n\cos(n)}|^{\frac{1}{n}} = 1/e$

$R(a^n) = 1/\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a^{n+1}|}{|a^n|} = 1/a \quad (a\neq 0)$

C- Séries entières : définition, convergences

Def 13 : On appelle série entière une série de fonctions dont le terme général est de la forme $z\longmapsto a_n z^n$. Par abus, on la note $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. [EA] 229

Def 14 : Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est celui de $(a_n)_n$.

Def 15 : • On appelle disque ouvert de convergence de $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble : [EA] 231

$$D_a := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R(a_n)\}$$

• On appelle cercle d'incertitude de $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble $C_a := \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = R(a_n)\}$

• On appelle ensemble de convergence de $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble E_a des $z\in\mathbb{C}$ tels que la série (numérique) $\sum_n a_n z^n$ converge.

Prop 16 : $D_a \subseteq E_a \subseteq D_a \cup C_a$, et $\sum_n a_n z^n$ converge absolument sur D_a. [G] 247

Thm 17 : $\forall r<R(a_n)$, $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $B(0,r)$. FIGURE 1 [EA] 238

Cex 18 : $\sum_{n\geq 0} z^n$ ne converge pas normalement sur $B(0,R(1)) = B(0,1)$. [EA] 238

Thm 19 (Produit de Cauchy) : Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On a $R(c_n)\geq \min(R(a_n),R(b_n))$, et $\forall z\in B(0,R(c_n))$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$ [EA] 235

II - Somme d'une série entière, développement en série en série entière (DSE)

A- Régularité de la somme d'une série entière

Pour $z\in E_a$, on pose $S_a(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Prop 20 : S_a est continue D_a. [T] 38

Thm 21 (d'Abel radial) : Si $R(a_n)>0$, alors $\forall z\in E_a$, $S_a(z) = \lim\limits_{r\to 1^-} S_a(rz)$. [G] 263

Appli 22 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ [G] 264

Thm 23 : S_a est $\mathbb{C}$-dérivable sur D_a, et $\forall z\in D_a$, $S_a'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$. [T] 39

Cor 24 : S_a est holomorphe sur D_a, avec $\forall z\in D_a$, $\forall p\in\mathbb{N}$, [T] 40

$$S_a^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p)a_{n+p} z^n$$

Cor 25 : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, s'il existe $r>0$ tel que $\forall z\in B(0,r)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n$ (unicité du DSE).

[B] 266 Thm 26 (nombres de Bell et formule de Doblinski) :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note B_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. On pose $B_0=1$.

DEV 1

1. $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}B_{n-k}$
2. La série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}t^n$ a un rayon de convergence $R>0$, et sa somme S vérifie : $\forall t\in]-R,R[$, $S'(t)=\exp(t)\,S(t)$.
3. Formule de Doblinski : $B_n = \frac{1}{e}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^n}{p!}$.

[T] 38 Thm 27 : Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ ou un segment de $\mathbb{R}$ inclus dans D_a.

$$\int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\gamma a_n z^n\,dz\right)$$

[T] 42 Ex 28 : • $\forall x\in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-t)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-t)^n dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t$

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}$

B- DSE d'une fonction au voisinage d'un point, analycité

Dans ce paragraphe, on se donne $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$

[T] 40 Def 29 : • On dit que f est développable en série entière (ou admet un DSE) au voisinage de $z_0\in\mathbb{C}$ s'il existe $r>0$ et $(a_n)_n\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall z\in B(z_0,r)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$.

[T] 50 • On dit que f est analytique sur $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ si f admet un DSE au voisinage de tout point de Ω.

[EA] 242 Ex 30 : Toute fonction polynomiale P est analytique sur $\mathbb{C}$, avec $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall a\in\mathbb{Z}$,

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\deg(P)}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

[T] 40 Prop 31 : Si f admet un DSE en $z_0\in\mathbb{C}$, alors f est holomorphe en z_0, et $\exists r>0$: $\forall z\in B(z_0,r)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ (série de Taylor de f en z_0).

Rq 32 : Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ admet un DSE au voisinage de $x_0\in\mathbb{R}$, alors f est C^∞ sur ce voisinage. La réciproque est fausse : considérer $f: x\neq 0\longmapsto \exp(-1/x^2)$, $0\mapsto 0$. [EA] 243

Thm 33 : Soient $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle et $f\in C^\infty(I,\mathbb{C})$. Alors f admet un DSE au voisinage de 0 si et seulement s'il existe $r>0$ tel que la suite $(R_n)_n$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in]-r,r[$, $R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge simplement vers 0 sur $]-r,r[$. Dans ce cas, $R(R_n)\geq r$, et $\forall x\in]-r,r[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. [G] 231

Thm 34 (de Bernstein) : Soient $r>0$ et $f\in C^\infty(]-r,r[,\mathbb{R})$. Si pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $x\in]-r,r[$, $f^{(2k)}(x)\geq 0$, alors f est analytique sur $]-r,r[$. [B] 57

Thm 35 : Notons $(b_n)_n$ la suite des nombres de Bernoulli, i.e. l'unique suite vérifiant $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ pour z proche de 0. [FGN] 310

DEV 2

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}b_{2k}$$

Prop 36 : Une série entière est analytique sur son disque de convergence. [T] 50

Plus précisément : $\forall z_0\in D_a$, $\forall z\in B(z_0, R(a_n)-|z_0|)$, $S_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$

FIGURE 2

Thm 37 (Formule de Cauchy) : $\forall r\in]0,R(a_n)[$, $\forall n\in\mathbb{N}$, [G] 250

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}S_a(re^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta$$

III - Applications

A - Fonction(s) exponentielle(s)

Soit $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Banach normée.

Def 38 : • Pour tout $X\in\mathcal{A}$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{X^n}{n!}$ converge normalement ; on appelle exponentielle de X sa somme que l'on note e^X et $\exp(X)$.

• Pour $X\in\mathcal{A}$, on définit $\cos(X) = \frac{e^{iX}+e^{-iX}}{2}$ et $\sin(X) = \frac{e^{iX}-e^{-iX}}{2i}$

Prop 39 : $\forall (X,Y)\in\mathcal{A}^2$, $XY=YX \Rightarrow \exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$

Prop 40 : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Prop 41 : Sur $\mathbb{C}$, exp induit une bijection de $B_\pi = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
On note Log sa réciproque. Elle vérifie $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.

B- Fonctions génératrices de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soient $X, Y, N : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{N}$ des variables aléatoires.

[CR] 41 **Def 42** : La fonction génératrice de X est $G_X : s \longmapsto \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) s^n$. Cette série entière a un rayon de convergence d'au moins 1.

[CR] 42 **Prop 43** : Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

[CR] 43 **Prop 44** : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, indépendantes de N. Posons $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$. Alors $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.

[CR] 41 **Prop 45** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$: la fonction génératrice caractérise la loi.

[CR] 45 **Prop 46** : X admet un moment d'ordre p $\Leftrightarrow$ G_X est p fois dérivable en 1^-.
Le cas échéant, $G_X^{(p)}(1^-) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)]$

RÉFÉRENCES

[EA] : Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. (Mohammed El Amrani).
[B] : Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J. & L. Bernis).
[FGN] : Oraux X-ENS – Analyse 2 (Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas)
[CR] : Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques (Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch)
[T] : Analyse complexe pour la licence 3 (Patrice Tauvel) [édition 2020].
[G] : Les maths en tête – Analyse (Xavier Gourdon) [3e édition]

FIGURE 1

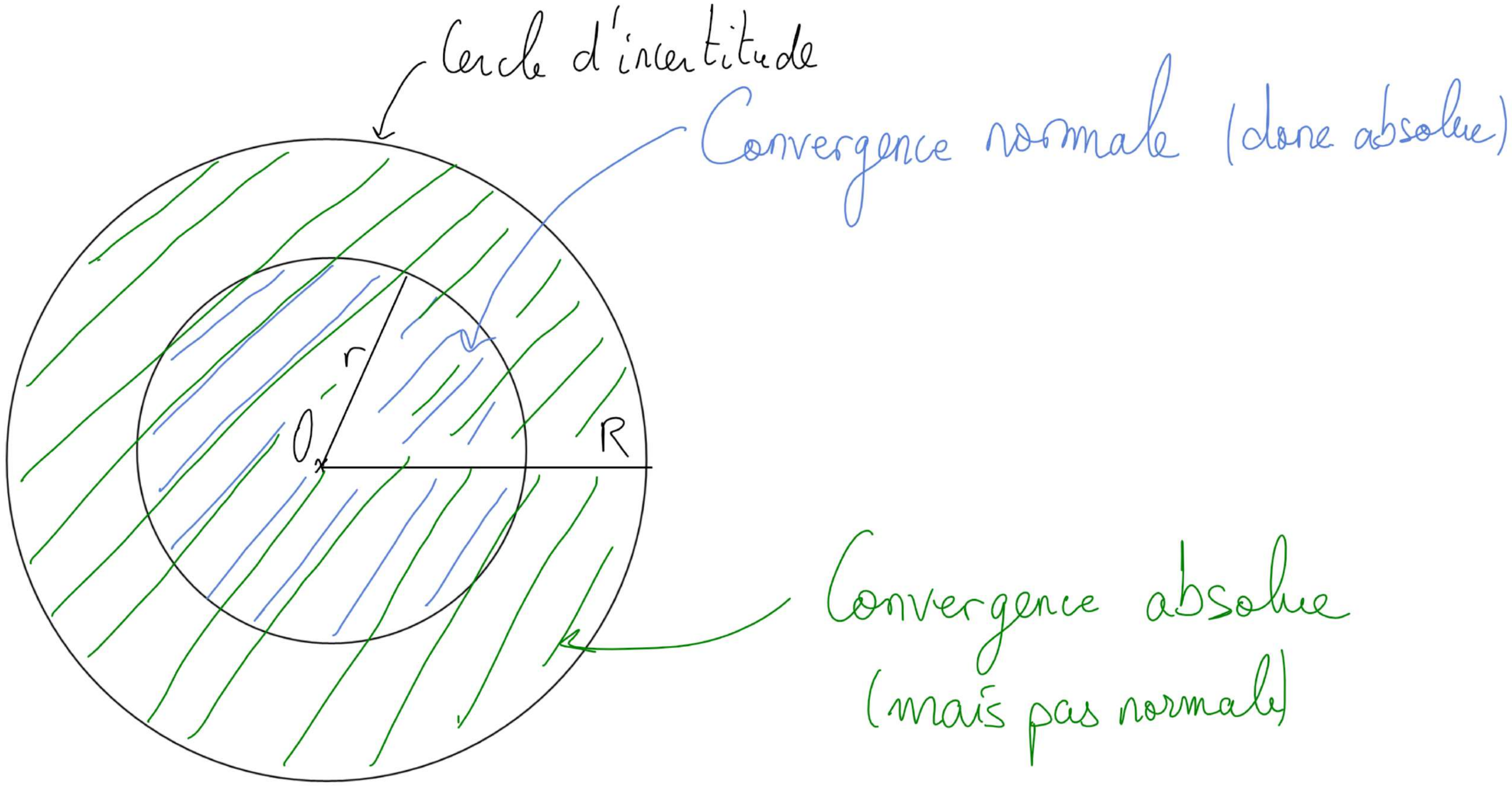

FIGURE 2