239

Fonctions définies par une intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

E est un espace métrique, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré. On considère $f : E\times X \to \mathbb{K}$ et $F : t\in E \longmapsto \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$.

I - Régularité des intégrales à paramètres, comportement asymptotique

[F] 17 Thm 0 (de convergence dominée) : Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f, et s'il existe $\varphi\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\le\varphi$ presque partout, alors f est intégrable, et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

A- Continuité

[F] 93 Thm 1 (de continuité sous le signe intégral) : Soit $t_0\in E$. Supposons que :

1▸ $\forall t\in E$, $x\longmapsto f(t,x)$ est mesurable,

2▸ Pour μ-presque tout $x\in X$ $t\longmapsto f(t,x)$ est continue en t_0,

3▸ $\exists\varphi\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que $\forall t\in E$, pour μ-presque tout $x\in X$, $|f(t,x)|\le\varphi(x)$.

Alors F est bien définie sur E, et continue en t_0.

Rq 2 : On peut se contenter de vérifier 3▸ pour t appartenant à tout compact de E contenant t_0.

[F] 106 Ex 3 : Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est intégrable, alors $\hat{g} : \xi\mapsto\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i\xi t}dt$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

B- Dérivabilité

[F] 94 Thm 4 (de dérivation sous le signe intégrale) : Supposons que $f : I\times X\to\mathbb{C}$ vérifie :

1▸ $\forall t\in I$, $x\longmapsto f(t,x)\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$

2▸ Pour μ-presque tout $x\in X$, $t\longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur I, de dérivée $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$

3▸ $\exists\varphi\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que $\forall t\in I$, pour μ-presque tout $x\in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\le\varphi(x)$

Alors F est bien définie et dérivable sur I, de dérivée donnée par :

$$\forall t\in I,\quad F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$$

[F] 130 Ex 5 : Soit $\alpha>0$, posons $g : x\in\mathbb{R}\mapsto e^{-\alpha x^2}$. Alors $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \hat{g}(0)\,e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$.

Ex 6 : Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ (semi-)converge, alors la fonction $\mathcal{L}(f) : x\in\mathbb{R}^+\longmapsto\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. [Bé] 253 [F] 93

↳ Application : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

DEV 1

Rq 7 : Là encore, on peut vérifier le point 3▸ sur tout segment de I.

Thm 8 (de transfert de classe C^k) : Supposons que $f : I\times X\to\mathbb{C}$ vérifie :

1▸ $\forall t\in I$, $x\longmapsto f(t,x)\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$

2▸ Pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour μ-presque tout $x\in X$, $t\longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur I, de k-ième dérivée $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t,x)$.

3▸ $\forall k\in\mathbb{N}$, $\exists\varphi_k\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que $\forall t\in I$, pour μ-presque tout $x\in X$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t,x)\right|\le\varphi_k(x)$

Alors F est bien définie et de classe C^k sur I, de dérivées données par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad\forall t\in I,\quad F^{(k)}(t) = \int_X\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t,x)\,d\mu(x)$$

Ex 9 : $\zeta : s\in]1,+\infty[\longmapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ est de classe C^∞.

C- Holomorphie

Thm 10 (holomorphie sous le signe intégrale) : Supposons que $f : \Omega\times X\to\mathbb{C}$ vérifie : [F] 95

1▸ $\forall z\in\Omega$, $x\longmapsto f(z,x)$ est mesurable,

2▸ Pour μ-presque tout $x\in X$, $z\longmapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot,x)$.

3▸ $\forall K\subseteq\Omega$ compact, $\exists\varphi_K\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall z\in K$, $\forall x\in X$, $|f(z,x)|\le\varphi_K(x)$

Alors F est bien définie et holomorphe sur Ω, de dérivée $F' : t\longmapsto\int_X\frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x)$.

Ex 11 : La fonction $\Gamma : z\longmapsto\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur $\Omega_0 := \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)>0\}$, de dérivées données par $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in\Omega_0$, $\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty}\ln(t)^n\,t^{z-1}e^{-t}\,dt$

Thm 12 : Pour $a>0$, $\lambda>0$ et $t\in\mathbb{R}$, on pose $\gamma_{a,\lambda}(t)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda t}t^{a-1}\mathbb{1}_{t>0}$

[CGC DM] • $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{\Gamma(a,\lambda)}(t):=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\gamma_{a,\lambda}(x)\,dx=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a$ (fonction caractéristique)

• $\forall t\in\,]-\infty,\lambda[$, $\mathcal{L}(\Gamma(a,\lambda))(t):=\int_{\mathbb{R}}e^{tx}\gamma_{a,\lambda}(x)\,dx=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$ (transformée de Laplace)

Cor 13 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la loi $\Gamma(a,\lambda)$ admet un moment d'ordre n donné par :

$$m_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{\lambda^n}$$

DEV 2

D - Comportement asymptotique

[Go] 163 **Thm 14** : Soient $[a,b[\,\subseteq\mathbb{R}$, $f:[a,b[\,\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:[a,b[\,\longrightarrow\mathbb{R}^{+*}$ continues par morceaux. Si $f\underset{x\to b^-}{=}o(g)$ et que $\int_a^b g<+\infty$, alors $\int_x^b f\underset{x\to b^-}{=}o\left(\int_x^b f\right)$. De même avec $f\underset{x\to b^-}{=}O(g)$ et $f\underset{x\to b^-}{\sim}g$. Si $f\underset{x\to b^-}{=}o(g)$ et que $\int_a^b g=+\infty$, alors $\int_a^x f\underset{x\to b^-}{=}o\left(\int_a^x g\right)$. De même avec $f\underset{x\to b^-}{=}O(g)$ et $f\underset{x\to b^-}{\sim}g$.

Appli 15 : Comme $\forall z\in\Omega_0$, $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, on a $\Gamma(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x}$, donc $\int_\varepsilon^1\Gamma(x)\,dx\underset{\varepsilon\to0}{\sim}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\frac{1}{\varepsilon^2}-1$.

[F] 102- **Thm 16** (Méthode de Laplace) : Soient $[a,b[\,\subseteq\mathbb{R}$, $\varphi\in C^2([a,b[,\mathbb{R})$, $f:[a,b[\,\longrightarrow\mathbb{R}$ continue en a et telle que $f(a)\neq0$. Supposons qu'il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $t\mapsto e^{-t_0\varphi}f\in L^1([a,b[)$, que $\varphi'>0$ sur $[a,b[$ et $\varphi''(a)>0$. Alors :

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)\,dx\underset{t\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\,\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$$

[F] 105 **Appli 17** (Formule de Stirling) : $\Gamma(t+1)\underset{t\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi t}\,(t/e)^t$.

II - Produit de convolution, transformée de Fourier

A - Produit de convolution

Soient $d\in\mathbb{N}^*$, $p\in[1,+\infty]$, $q\in[1,+\infty]$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Def 18 : • Le produit de convolution de $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $f*g$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ par $f*g(x):=\int_{\mathbb{R}^d}f(t)g(x-t)\,dt$ [BP] 297 301

• Le produit de convolution de $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $f*g$ définie pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$ par $f*g(x):=\int_{\mathbb{R}^d}f(t)g(x-t)\,dt$.

Appli 18 : Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant des densités f_X et f_Y, alors $X+Y$ est à densité, donnée par $f_{X+Y}=f_X*f_Y$. [CR] 28

Exemple : Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda>0$), alors : [CR] 363

$$X_1+\dots+X_n\sim\Gamma(n,\lambda)\qquad\text{(loi d'Erlang)}$$

Prop 19 : Si $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $1<p<+\infty$, alors $f*g(x)\xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{}0$. [BP] 297

Prop 20 : • Si $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_\infty\leq\|f\|_p\|g\|_q$ [BP] 297 301

• Si $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\|g\|_1$.

Def 21 : Une approximation de l'unité est une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : [Go] 304

• $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\geq0$ • $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|\alpha_n\|_1=1$ • $\forall\delta>0$, $\int_{|t|>\delta}\alpha_n(t)\,d\mu(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Si de plus $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, alors on dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante. [BP] 307

Ex 22 : Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $\alpha:x\in\,]-1,1[\,\longmapsto\exp(-1/[1-x^2])$, $x\notin\,]-1,1[\,\mapsto0$, [BP] 302 +307
$\tilde{\alpha}_n:x\mapsto n\alpha(nx)$, et $\alpha_n:=\tilde{\alpha}_n/\|\tilde{\alpha}_n\|_1$. Alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante.

Prop 23 : Soient $p<+\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R})$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. [BP] 303 [Go] ~304

$$\|f*\alpha_n-f\|_p\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Appli 24 : $(x \longmapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

B - Transformation de FOURIER

[F] 130 **Def 25** : Pour $f\in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de FOURIER de f :

$$\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

La transformation de FOURIER est l'application $\mathcal{F} : f \longmapsto \hat{f}$.

[F] 106 **Lemme 26** (de RIEMANN-LEBESGUE) : $\forall f\in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}\in C_0(\mathbb{R})$.

[F] 130 **Thm 27** : $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire (continu) de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ de norme 1.

[F] 133 **Thm 28** : $\mathcal{F}$ est injective, et [admis] non surjective.

[F] 138 **Appli 29** : La fonction caractéristique caractérise la loi.

[F] 131 **Thm 30** : $\mathcal{F}$ est un morphisme de l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ dans l'algèbre multiplicative $C_0(\mathbb{R})$.

[F] 133 **Thm 31** (Formule d'inversion) : Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.

$$\left\| f(\cdot) - \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-\cdot)\right\|_1 = 0$$

Cor 32 : Soit $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C^0(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)$$

[F] ~130 **Appli 33** : Soient $c>0$ et $\varphi : x\longmapsto e^{-c|x|}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(t) = \frac{2c}{c^2+t^2}$, donc la fonction caractéristique de la loi de CAUCHY $\mathcal{C}(c)$ est :

$$t\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{c}{c^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{\varphi}}(-t) = \varphi(t).$$

RÉFÉRENCES

[F]

[Go]

[BP]

[Bê]

[CR]

[CGC DM]