236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

I - Intégration des fonctions scalaires d'une ou plusieurs variables réelles...

A- ... par calcul d'une primitive

[Go] 127 **Thm 1** : Si F est une primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Ex 2 : ▸ $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} [\arctan(x)]_{-A}^{A} = \pi$.

▸ Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}$

[Go] 137 **Thm 3** : Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible. Soit $Q = D_1^{\alpha_1} \cdots D_r^{\alpha_r}$ la décomposition en produit d'irréductibles de Q dans $\mathbb{K}[X]$. Il existe E et $(A_{i,j})_{1\le i\le r, 1\le j\le \alpha_i}$ dans $\mathbb{K}[X]$ uniques tels que $\frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{D_i^j}$ et $\deg(A_{i,j}) < \deg(D_i)$.

Prop 4 : $\forall n \geq 1$, $\int \frac{-nu'}{u^{n+1}} = \frac{1}{u^n}$, $\int \frac{u'}{u} = \ln(u)$ $(u>0)$ et $\int \frac{1}{1+u^2} = \arctan(u)$

[Go] 142 ? **Ex 5** : ▸ $x \longmapsto \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x(x^2+1)^2}$.

▸ $\int_0^1 \frac{2x^3+4x^2+6x+6}{2x^2+2x+1}\,dx = \frac{3}{4}\ln(5) + \frac{7}{2}\arctan(3) + \frac{3}{2} - \frac{7\pi}{8}$

B- ... par intégration par partie et changement de variable

[Go] 127 **Thm 6** (d'intégration par parties) : Soit $(u,v) \in C^1([a,b], \mathbb{K})^2$.

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

[Go] 130 **Ex 7** : Intégrales de WALLIS : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n\,dt$. On a $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

[Go] 315 **Ex 8** : Fonction Γ : pour $x>0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$. Alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

[F] 71 **Thm 9** (de changement de variable) : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : V \to U$ un C^1-difféomorphisme, et $f : U \to \mathbb{K}$ intégrable. Alors $f\circ\varphi \times |\det(Jac_\varphi)|$ est intégrable sur V, avec :

$$\int_V f\circ\varphi(v)\cdot|\det(Jac_\varphi(v))|\,dv = \int_U f(u)\,du$$

Rq 10 : Cas particulier : coordonnées polaires :

$$\iint_{\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}^-\times\{0\})} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,d\theta\,dr$$

Ex 11 : ▸ $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos(x)^n\,dx$ $\quad (x = \frac{\pi}{2} - t)$

▸ $\mathcal{A}(D(0,R)) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x^2+y^2\le R^2}\,dx\,dy = R^2\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_{x^2+y^2\le 1}\,dx\,dy$

$= R^2\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\mathbb{1}_{r\le 1}\,r\,d\theta\,dr = 2\pi R^2$.

C- par permutation d'intégrales : les théorèmes de FUBINI

Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.

Thm 12 (de FUBINI-TONELLI) : Si f est $\mu\otimes\nu$-mesurable et positive, alors $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ aussi, et : [F] 61

$$\iint_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

Thm 13 (de FUBINI) : Si f est $\mu\otimes\nu$-intégrable, alors $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ aussi, et : [F] 59

$$\iint_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

Ex 14 : ▸ $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, $\forall\alpha>0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,dx = \sqrt{\pi}^n$ [BP] 262 263

▸ $\lambda(\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \le 1\}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

Thm 15 (interversion série - intégrale) : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ ou si $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$, alors : [F] 17

$$\int_X\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_X f_n\,d\mu\right)$$

Ex 16 : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

II - Intégrales dépendant d'un paramètre

A - Utilisation des théorèmes de transfert de la régularité

Dans ce paragraphe, $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré, E est un espace métrique, $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle et $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert.

[F] 93 Thm 17 (de continuité sous le signe intégrale) : Soient $u_0 \in E$ et $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

- $\forall u \in E$, $x \longmapsto f(u,x)$ est mesurable sur X,
- Pour μ-presque tout $x \in X$, $u \longmapsto f(u,x)$ est continue en u_0,
- $\exists \varphi \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall u \in E$, pour μ-presque tout $x \in X$, $|f(u,x)| \leq \varphi(x)$.

Alors $F : u \mapsto \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est bien définie sur E et continue en u_0.

[F] 106 Ex 18 : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, alors $\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\xi t}\,dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{\pm\infty} \hat{f} = 0$.

[F] 94 Thm 19 (de dérivation sous le signe intégrale) : Soit $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

- $\forall u \in I$, $x \longmapsto f(u,x) \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$,
- Pour μ-presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur I, de dérivée $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)$,
- $\exists \varphi \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall u \in I$, pour μ-presque tout $x \in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq \varphi(x)$.

alors $F : u \mapsto \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est bien définie et dérivable sur I, de dérivée :

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu(x)$$

[F] 130 Ex 20 : Pour $G_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$, $\hat{G_\alpha} : \xi \mapsto \hat{G_\alpha}(0)\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$ $(\alpha > 0)$.

[F] 95 Thm 21 (holomorphie sous le signe intégrale) : Soit $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

- $\forall u \in \Omega$, $x \longmapsto f(u,x)$ est mesurable sur X,
- Pour μ-presque tout $x \in X$, $u \longmapsto f(u,x)$ est holomorphe sur Ω,
- $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists \varphi_K \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall u \in K$, $\forall x \in X$, $|f(u,x)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors $F : u \mapsto \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est bien définie et holomorphe sur Ω, de dérivée :

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu(x)$$

Ex 22 : Soient $a > 0$, $\lambda > 0$ et $X \sim \Gamma(a,\lambda)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$, en particulier X admet des moments de tout ordre, donnés par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X^n] = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{\lambda^n}$. DEV 1 [CGC DM]

B - Utilisation de la transformation de Fourier / de Laplace

Def 23 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* : [F] 130

$$\mathcal{F}[f] : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt}\,dt$$

Ex 24 : En dérivant sous le signe intégrale, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, [F] 131
$\mathcal{F}\left[t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}\right](x) = e^{-x^2}$, et on en déduit $\mathcal{F}\left[t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right]$ pour tous $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ par changement de variable.

Thm 25 (d'inversion de Fourier) : Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](x)\, e^{itx}\,dx$. [F] 133

Ex 26 : Pour tous $c > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\left[t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{c^2}{t^2 + c^2}\right](x) = e^{-c|x|}$. [F] ~130

Def 27 : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\,dt$ existe, on définit sa *transformée de Laplace* $\mathcal{L}[f] : x \geq 0 \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$.

Prop 28 : $\mathcal{L}[f]$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Ex 29 (intégrale de Dirichlet) : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. DEV 2 [F] 99

III - Intégration des fonctions de la variable complexe

[T] 141 **Thm 30** (des résidus) : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admettant des pôles $a_1, \dots, a_n$ dans U. Pour tout lacet γ de $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$,
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_f(a_k)\, \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)$$

Ex 31 : En intégrant le long de Γ_+ ou Γ_- de FIGURE 1, on peut montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ ou $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

[EA] 112-156 **Ex 32** : En intégrant $G_\alpha : z \mapsto e^{-\alpha z^2}$ $(\alpha > 0)$ le long du rectangle de sommets $\pm R$ et $\pm R + \frac{ix}{2\alpha}$, on montre que $\mathcal{F}[G_\alpha](x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, G_{1/4\alpha}$.

IV - Méthodes approchées ...

A- ... par approximation de l'intégrande

Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$

L'idée est d'approcher f par une suite $(f_n)_n$ de fonctions plus simples.

Thm 33 (intégrale de RIEMANN) : $R_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$.

[Da] 506 Si f est de classe C^1, alors $\left|R_n(f) - \int_a^b f\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \|f'\|_\infty^{[a,b]}$.

Rq 34 : Cette approximation s'appelle méthode des rectangles, en vertu de la FIGURE 2. On peut l'affiner avec la méthode des trapèzes :

[Da] 508 **Prop 35** : $T_n(f) := \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \longrightarrow \int_a^b f$ FIGURE 3

Si de plus f est de classe C^2, $\left|T_n(f) - \int_a^b f\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty^{[a,b]}$.

[Go] 235 **Thm 36** (de WEIERSTRASS) : Il existe $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales telles que $\|P_n - f\|_\infty^{[a,b]} \longrightarrow 0$.

Prop 37 : Si $\|P_n - f\|_\infty^{[a,b]} \longrightarrow 0$, alors $\int_a^b P_n \longrightarrow \int_a^b f$.

Appli 38 : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$, alors $f = 0$. [Go] 306

Rq 39 : Dans la même idée, on peut calculer des surfaces et des volumes en les encadrant par des formes géométriques plus simples.

B- ... par une approche probabiliste

Thm 40 (loi forte des grands nombres) : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires identiques et indépendantes admettant une espérance m. [CR] 53
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} m$$

Appli 41 (méthode de MONTÉ-CARLO) : Soient $f \in L^1([0,1]^d)$ et $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1]^d)$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{p.s.} \int_{[0,1]^d} f$.

Rq 42 : Dans la même idée que Rq 39, on peut approcher une surface par acceptation - rejet : on enferme la surface dans un rectangle, on tire un point uniformément dans ce rectangle, et on mesure la proportion de points qui tombent sur la surface voulue. FIGURE 4

RÉFÉRENCES

[Go] [Dem]
[BP] [CR]
[F] [T]
[EA] [CGC DM]
[Da]

FIGURE 1

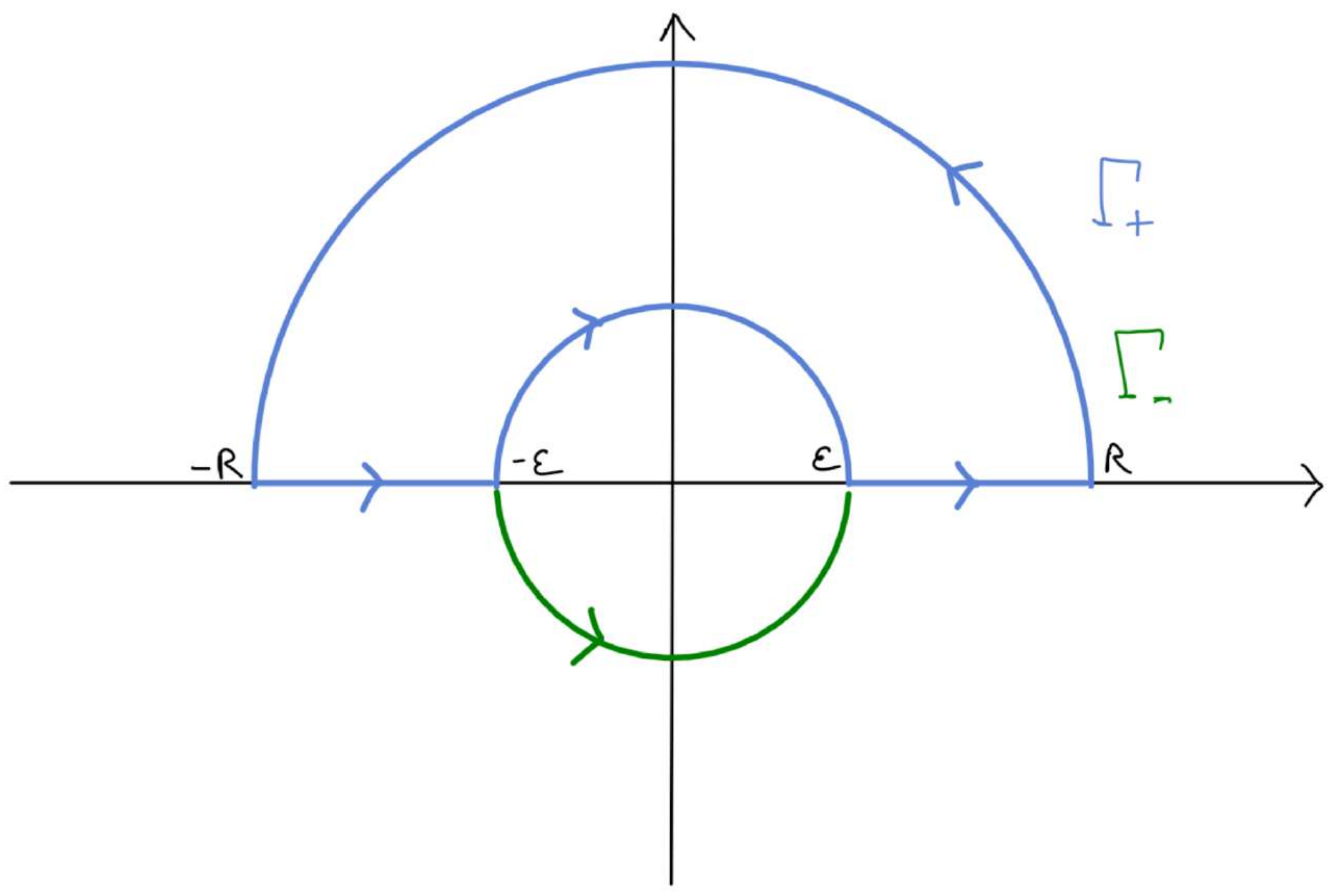

FIGURE 2

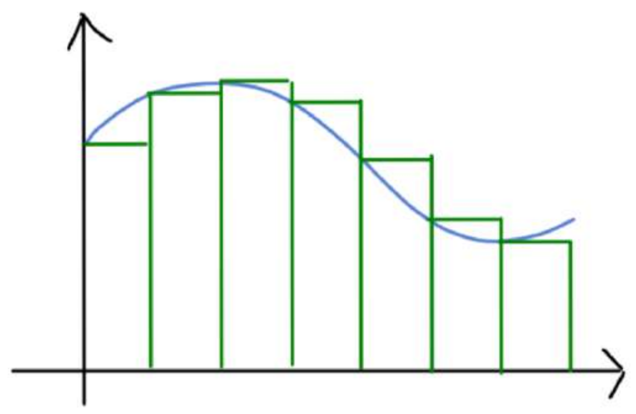

FIGURE 3

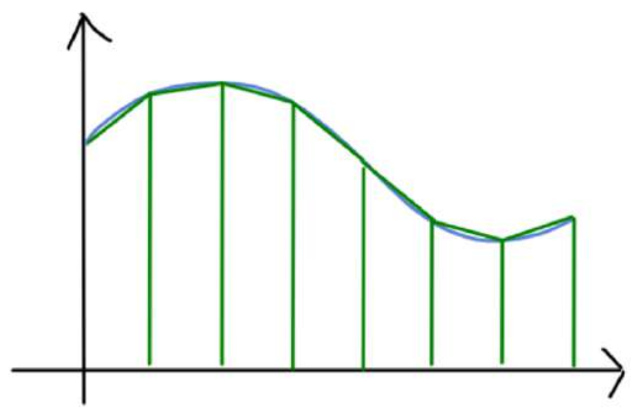

FIGURE 4

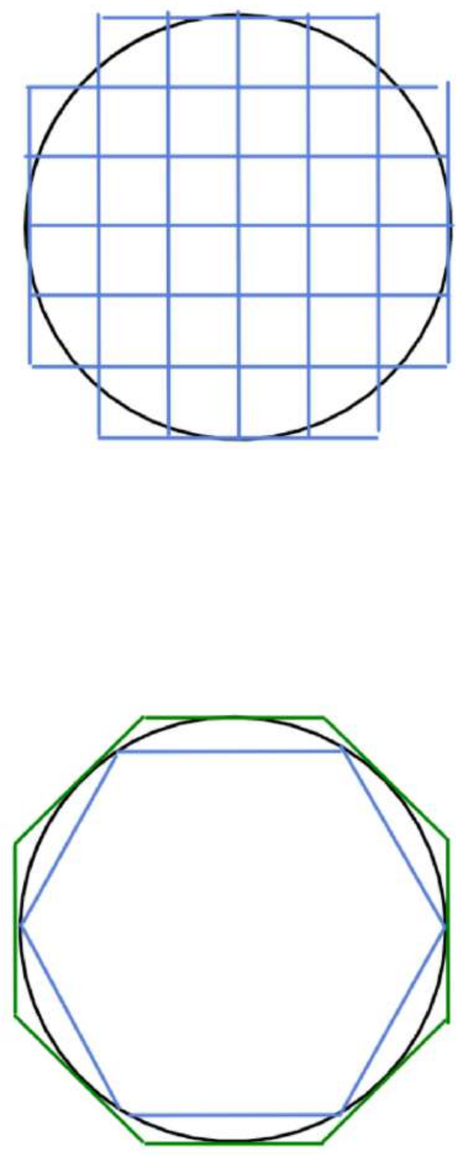

FIGURE 5