235 — Problèmes d'interversion en analyse

Dans cette leçon, $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, $f,g : E \longrightarrow F$ deux fonctions, $(f_n)_n \in \mathcal{F}(E,F)^{\mathbb{N}}$ et $D \subseteq E$ tel que $D \subseteq D_f \cap D_g \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{f_n}\right)$.

I - Cadre des problèmes d'interversion et interversion limite-limite

A - Convergence(s) des suites et séries de fonctions

[EA] 139-140 **Def 1**: On dit que $(f_n)_n$ converge ...

- ... simplement (CVS) vers f sur D si $\forall x \in D$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_F} f(x)$, i.e. $\|f_n(x)-f(x)\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
- ... uniformément (CVU) vers f sur D si $\sup_{x\in D} \|f_n(x)-f(x)\|_F \longrightarrow 0$

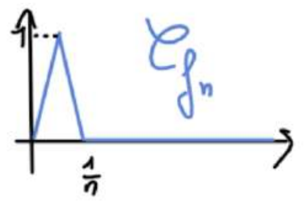
[EA] 192-193 **Def 2**: On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ...

- ... converge absolument (CVA) sur D si $\forall x \in D$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\|_F$ converge,
- ... converge normalement (CVN) sur D si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in D} \|f_n(x)\|_F$ converge,
- ... converge simplement sur D si $\left(\sum_{n=0}^N f_n\right)_N$ converge simplement,
- ... converge uniformément sur D si $\left(\sum_{n=0}^N f_n\right)_N$ converge uniformément, i.e. $\sup_{x\in D} \left\|\sum_{N+1}^{+\infty} f_n(x)\right\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Dans la suite, les convergences seront implicitement sur D.

[EA] 140, 192-194 **Prop 3**: Si $(f_n)_n$ CVU vers f, alors $(f_n)_n$ CVS vers f.
Si $(F,\|\cdot\|_F)$ est complet, alors le diagramme suivant est réalisé :

$$\begin{array}{ccc} \text{CVN} & \Rightarrow & \text{CVU} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{CVA} & \Rightarrow & \text{CVS} \end{array}$$

Ex 4:
- Si f_n est définie par son graphe , alors $(f_n)_n$ converge simplement vers 0, mais pas uniformément.
- Si $f_n(z) = z^n$ pour $|z|<1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument, mais pas normalement.
- Si $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ pour $x \in]-1,1[$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ CVS vers $x \mapsto \ln(1+x)$, mais pas absolument.
- Si $f_n(z) = \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ CVU mais pas normalement (sur $\mathbb{C}$).

B - Le théorème de la double limite et ses corollaires

[EA] 146 **Thm 5** (de la double limite) : Supposons que F est complet et que $(f_n)_n$ CVU vers f.
Soit $a \in \overline{D}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x)$ existe. Alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x)$ existe, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x)$$

Cor 6: Si $(f_n)_n$ CVU vers f et si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en $a \in D$, alors f est continue en a. [EA] 146

Cor 7: Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathbb{K}$-dérivable sur D, si $(f_n)_n$ CVS vers f, et si $(f_n')_n$ CVU vers g, [EA] 148
alors f est $\mathbb{K}$-dérivable sur D, et $f' = g$ et $(f_n)_n$ CVU vers f.

Rq 8: Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est deux fois dérivable, si $f_n \xrightarrow{CVS} f$, $f_n' \xrightarrow{CVS} g$ et $f_n'' \xrightarrow{CVU} h$, alors d'après $h = g'$ et $f_n' \xrightarrow{CVU} g$, donc $g = f'$ (et $f_n \xrightarrow{CVU} f$), puis $h = f''$. Par récurrence, cela fonctionne pour n'importe quel ordre de dérivation.

Cor 9: Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est différentiable sur un ouvert Ω de E, si $(f_n)_n$ CVS sur Ω vers f, et si $(df_n)_n$ CVU sur Ω, alors f est différentiable sur Ω, $(f_n)_n$ CVU vers f sur Ω, et $df = d\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) = \lim_{n\to+\infty} df_n$. [Rv] 107

Ex 10: Différentielle (et différentiabilité) de l'exponentielle matricielle. [Rv] 107

Cor 11: Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathbb{K}$-dérivable sur D, et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ CVS et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ CVU, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathbb{K}$-dérivable sur D, et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$. [EA] 197

Ex 12: Toute série entière est holomorphe sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence. [T] 50

Ex 13: Si $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$, alors $\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Ex 14: Si $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$, alors $(f_n)_n$ CVU vers $f : x \mapsto |x|$; f est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. [EA] 148

II - Interversion limite-intégrale

Dans ce qui suit $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to \mathbb{C}$, et $f,g : X \longrightarrow \mathbb{C}$.

Prop 15: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Si $(f_n)_n$ CVU vers f sur $[a,b]$, alors [EA] 151

$$\int_a^b f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$$

Rq 16: Si $(f_n)_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors Cor 7 se montre directement en écrivant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) - f_n(0) = \int_0^x f_n'(t)\,dt$.

A- Théorèmes de convergence monotone et dominée, conséquences

[F] 9 **Thm 17** (de convergence monotone) : Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives et mesurables, alors $(f_n)_n$ CVS sur X, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim\limits_{n\to+\infty} f_n\,d\mu$.

[F] 17 **Thm 18** (de convergence dominée) : Si $(f_n)_n$ CVS vers f, et s'il existe $\varphi\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leq\varphi$ presque partout, alors $f\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$, et $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu$

[F] 17 **Ex 19** : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$.

- $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty}|f_n|\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_X |f_n|\,d\mu$
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n|\,d\mu$ converge, alors $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n\,d\mu$

↳ Application : intégration terme à terme des séries entières.

Ex 20 : Si $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$, alors $(f_n)_n$ CVS vers 0, mais $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx$.

Ex 21 : Si $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$, alors f_n est positive et mesurable, CVS vers 0, mais $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx$.

B- Théorèmes de transfert de régularité aux intégrales à paramètres

Dans ce paragraphe, E est un espace métrique, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

[F] 97 **Thm 22** (de continuité sous le signe intégrale) : Soient $u_0\in E$ et $f : E\times X\longrightarrow\mathbb{C}$ vérifiant :

- $\forall u\in E$, $x\longmapsto f(u,x)$ est mesurable sur X,
- Pour μ-presque tout $x\in X$, $u\longmapsto f(u,x)$ est continue en u_0,
- $\exists\varphi\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall u\in E$, pour μ-presque tout $x\in X$, $|f(u,x)|\leq\varphi(x)$.

Alors $F : u\longmapsto\int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est bien définie sur E et continue en u_0.

[F] 106 **Ex 23** : Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ est intégrable, alors $\hat{f} : \xi\longmapsto\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-i\xi t}\,dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{\pm\infty}\hat{f} = 0$.

Thm 24 (de dérivation sous le signe intégrale) : Soit $f : I\times X\longrightarrow\mathbb{C}$ vérifiant : [F] 94

- $\forall u\in I$, $x\longmapsto f(u,x)\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$,
- Pour μ-presque tout $x\in X$, $u\longmapsto f(u,x)$ est dérivable sur I, de dérivée $u\longmapsto\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)$,
- $\exists\varphi\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall u\in I$, pour μ-presque tout $x\in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right|\leq\varphi(x)$.

alors $F : u\longmapsto\int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est bien définie et dérivable sur I, de dérivée :

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu(x)$$

Ex 25 : Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ est telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ (semi-)converge, alors la fonction [B^2_e] 259 [F] 98

$\mathcal{L}(f) : x\in\mathbb{R}^+\longmapsto\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

↳ Application : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

DEV 1

Ex 26 : Si $f(x) = e^{-ax^2}$, alors $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ $(a>0)$. [F] 130

Ex 27 : Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre $n\geq 1$, alors φ_X est n fois dérivable en 0, et $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n\,\mathbb{E}[X^n]$. [GK] 244-245

Thm 28 (holomorphie sous le signe intégrale) : Soit $f : \Omega\times X\longrightarrow\mathbb{C}$ vérifiant : [F] 95

- $\forall u\in\Omega$, $x\longmapsto f(u,x)$ est mesurable sur X,
- Pour μ-presque tout $x\in X$, $u\longmapsto f(u,x)$ est holomorphe sur Ω,
- $\forall K\subset\Omega$ compact, $\exists\varphi_K\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall u\in K$, $\forall x\in X$, $|f(u,x)|\leq\varphi_K(x)$.

Alors $F : u\longmapsto\int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est bien définie et holomorphe sur Ω, de dérivée :

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu(x)$$

Appli 29 : $t\longmapsto\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a$ est la fonction caractéristique de la loi $\Gamma(a,\lambda)$. On en déduit les moments de tout ordre de $\Gamma(a,\lambda)$ avec Ex 27. [CGC DM]

DEV2

III - Interversion intégrale-intégrale

Dans cette section, $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ sont deux espaces mesurés σ-finis.

[F] 61 **Thm 30** (de FUBINI-TONELLI) : Soit $f : X\times Y \longrightarrow [0,+\infty]$ mesurable.

- $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont mesurables,
- $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$.

[F] 131 **Ex 31** : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}$, $\forall a>0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

[F] 59 **Thm 32** (de FUBINI-LEBESGUE) : Soit $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mu\otimes\nu$-intégrable.

- $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est définie μ-presque partout et est μ-intégrable,
- $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ est définie ν-presque partout et est ν-intégrable,
- $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$.

[F] 63 **Ex 31** : Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ par étude de $f(x,y) = e^{-xy}\sin(x)$ sur $[0,A]\times[0,+\infty[$ $(A>0)$.

Ex 32 : $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 2e^{-2xy} - e^{-xy}\,dy\right)dx \neq \int_0^1\left(\int_0^{+\infty} 2e^{-xy} - e^{-xy}\,dx\right)dy$

Par conséquent, $(x,y)\longmapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ n'est pas intégrable sur le produit $[0,+\infty[\times[0,1]$.

[F] 119 **Ex 33** : Soient $f\in \underset{(1\leq p<+\infty)}{L^p(\mathbb{R})}$ et $g\in L^1(\mathbb{R})$. Le produit de convolution $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt$ est bien défini pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \times \|g\|_p$.

[FGN] 310 **Thm 34** : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de BERNOULLI, i.e. l'unique suite vérifiant $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ pour z proche de 0.

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}\, b_{2k}$$

IV - Interversion de quantificateurs

Def 35 : C^0, UC^0 [Rb] 162,173

Thm 36 : HEINE [Rb] 170

Appli 37 : (JORDAN C^1 ?) [GT]

Def 38 : Équicontinuité [HL]

Thm 39 : ASCOLI-ARZELÀ

Appli 40 : Opérateurs compacts à noyau.

RÉFÉRENCES

[EA] Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. (Mohammed El Amrani).

[Bé] Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J. & L. Bernis).

[FGN] Oraux X-ENS - Analyse 2 (Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas)

[F] Calcul intégral (Jacques Faraut)

[T] Analyse complexe pour la licence 3 (Patrice Tauvel) [édition 2020].

[Rb]

[HL]

[GT]