Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

234

Dans cette leçon, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Autour de l'intégrale de LEBESGUE

A – Cas des fonctions étagées ou mesurables positives

[F] 7 __Def 1__ : Soit $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ étagée. On définit l'intégrale de f sur $E \in \mathcal{A}$ par rapport à μ comme $\int f \, d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \, \mu(f^{-1}(\{\alpha\}) \cap E) \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

[F] 8 __Def 2__ : Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable. On définit l'intégrale de f sur $E \in \mathcal{A}$ par rapport à μ comme $\int_E f \, d\mu = \sup_{s \text{ étagée}, 0 \leq s \leq f} \int_E s \, d\mu$.

[F] ~4 __Thm 3__ : $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ est mesurable si, et seulement si f est la limite simple d'une suite croissantes de fonctions étagées positives.

[F] ~8-9 __Thm 4__ : Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurables, $(A, E) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A \subseteq E$, et $c \geq 0$.

1. $f_{|E} \leq g_{|E} \Rightarrow \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$
2. $\int_E f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_E \, d\mu$
3. $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\mu = 0$
4. $\begin{cases} f_{|A} = 0 \\ \mu(A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_E f \, d\mu = \int_{E \setminus A} f \, d\mu$
5. $\int_A f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$
6. $\int_E c f \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$

[F] 11 12 __Thm 5__ : Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ étagées et $(E_n)_{n \geq 1}$ une partition de $E \in \mathcal{A}$.

1. $\int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$
2. $\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$.

[F] ~9 __Thm 6__ (de convergence monotone) : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. La limite simple f de $(f_n)_{n \geq 1}$ est mesurable, et $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

[F] ~9 __Cor 7__ : Thm 5 reste vrai pour des fonctions mesurables positives.

[F] 11 __Lemme 8__ (de FATOU) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. On a $\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

B – Fonctions LEBESGUE – intégrables

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \min(f, 0)$.

__Def 9__ : On dit que f est intégrable (pour μ) (sur X) si f est mesurable et si $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$. Pour $E \in \mathcal{A}$, on définit alors l'intégrale de f sur E par rapport à μ comme $\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$. [F] 13

__Ex 10__ : Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable pour la mesure de comptage $\#$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Alors f est intégrable si, et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ converge absolument. Le cas échéant, $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \int_{\mathbb{N}} f \, d\#$.

__Ex 11__ : Soient $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. La fonction f est intégrable pour la mesure de LEBESGUE λ sur $[a,b]$, et $\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$.
Autrement dit, l'intégrale de LEBESGUE construite précédemment généralise l'intégrale de RIEMANN.

__Thm 12__ : Tous les Thm précédents restent vrais pour f et g intégrables.

__Prop 13__ : Si f est intégrable (sur X), alors $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$. [F] 14

__Thm 14__ (de convergence dominée) : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions intégrables qui converge simplement presque partout vers $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. [F] 17
S'il existe $g \geq 0$ intégrable sur X telle que $\forall n \geq 1$, $|f_n| \leq g$, presque partout, alors : $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

__Cex 15__ : $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{cvs}} 0$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1 \not\longrightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\lambda$.
L'hypothèse de domination n'est pas vérifiée.

__Appli 16__ : Théorèmes de transfert de régularité pour les fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. [F] 93

Dans la fin de ce paragraphe, on suppose que μ est σ-finie, et on se donne $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ un espace mesuré σ-fini, et $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable.

[F] 61 **Thm 17** (de FUBINI-TONELLI) : Supposons f positive.
Pour tout $(x,y) \in X \times Y$, $f(\cdot,y)$, $f(x,\cdot)$, $\int_X f(x,\cdot)\, d\mu(x)$ et $\int_Y f(\cdot,y)\, d\nu(y)$ sont mesurables, et $\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

[F] 69 **Appli 18** : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

[F] 59 **Thm 19** (de FUBINI-LEBESGUE) : Supposons que f est intégrable pour $\mu\otimes\nu$.
Pour μ-presque tous $x \in X$ et ν-presque tous $y \in Y$, $f(x,\cdot)$, $f(\cdot,y)$, $\int_X f(x,\cdot)\, d\mu(x)$ et $\int_Y f(\cdot,y)\, d\nu(y)$ sont intégrables, et :

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Cex 20 : Pour $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mu = \nu = \text{card}$ et $f : (i,j) \longmapsto$
et 0 sinon. On a

II - Espaces L^p des fonctions LEBESGUE-intégrables

A - Définitions et premières propriétés

[BP] 157 158 175 165 **Def 21** : Pour $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on pose :
- Pour $p \in [1,+\infty[$, $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|f\|_\infty := \inf\{C>0 \mid \mu(\{x\in X \mid |f(x)| > C\}) = 0\}$

[F] 41-44 Et pour $p \in [1,+\infty]$, on pose $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}$
et $L^p(X,\mathcal{A},\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)/\sim$ où $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{x\in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.
Lorsque $X = \mathbb{N}$ ou $X = \mathbb{Z}$ et μ est la mesure de comptage sur X, on note plutôt $\ell^p(X) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{P}(X), \mu)$.

[F] 43 **Prop 22** : $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$, et $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ presque partout.

[F] 42 **Thm 23** (inégalité de HÖLDER) : Soit $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 0$.
$$\forall f \in L^p(X,\mathcal{A},\mu),\quad \forall g \in L^q(X,\mathcal{A},\mu),\quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

[F] 46 [BP] 166 176 **Thm 24** (de RIESZ-FISHER) : Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $(L^p(X,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_p)$ est (un espace vectoriel normé) complet.

Prop 25 : Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$.
- Si $\mu(X)$ est finie, alors $L^q(X,\mathcal{A},\mu) \subseteq L^p(X,\mathcal{A},\mu)$,
- Si μ est une probabilité, alors $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$,
- $\ell^p(\mathbb{N}) \subseteq \ell^q(\mathbb{N})$.

Rq 26 : En général, ces inclusions sont strictes : $x \longmapsto \frac{1}{x} \in L^2([1,+\infty[) \setminus L^1([1,+\infty[)$.

Thm 27 : $\|\cdot\|_2$ dérive du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \int_X f\bar{g}\, d\mu$, qui de $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace de Hilbert. [F] 49

Thm 28 : Supposons que μ est une mesure de probabilité. Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $X \in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ réelle. Il existe une variable aléatoire Z presque sûrement unique $\mathcal{B}$-mesurable et telle que $\forall B\in\mathcal{B}$, $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_B]$. Elle est de plus intégrable. On l'appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, et on la note $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$. DEV 1 [CR] 77

III - Convolution et transformée de FOURIER

A - Convolution, régularisation et densités

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1,+\infty]$, $q \in [1,+\infty]$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Def 29 :
- Le produit de convolution de $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $f*g$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\, dt$. On a $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. [BP] 297 301
- Le produit de convolution de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $f*g$ définie pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$ par $f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\, dt$. On a $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Prop 30 : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $1 < p < +\infty$, alors $f*g(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} 0$. [BP] 297

Def 31 : Une approximation de l'unité est une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : [Go] 304
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_n \geq 0$
- $\forall n \in\mathbb{N},\ \|\alpha_n\|_1 = 1$
- $\forall \delta > 0,\ \int_{|t|>\delta} \alpha_n(t)\, d\mu(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

[BP] 302 +307 Ex 32 : Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(-1/[1-x^2])\, \mathbb{1}_{|x|<1}$, et $\tilde{\alpha}_n : x \mapsto n\,\alpha(nx)$, et $\alpha_n := \tilde{\alpha}_n / \|\tilde{\alpha}_n\|_1$. Alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$.

[Go] ~304 [BP] 303 Prop 33 : Soient $p<+\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

$$\|f * \alpha_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Thm 34 : $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ sont denses dans $(L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), \|\cdot\|_p)$.

[BP] 297 Prop 35 : Soient $1 \leq p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour toutes $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, i.e. $f*g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $f*g(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$.

[BP] 297 Prop 36 : Pour toutes $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f * g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

B - Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

[F] 130 Def 37 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f :

$$\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

La transformation de Fourier est l'application $\mathcal{F} : f \longmapsto \hat{f}$.

[F] 130 Ex 38 : • $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) = 2 \operatorname{sinc}(\xi)$

• $\forall c>0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}[x \mapsto e^{-c|x|}] = \frac{2c}{c^2+\xi^2}$

• Pour $\sigma > 0$, on pose $g_\sigma : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\sigma(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$.

[F] 106 Lemme 39 (de Riemann-Lebesgue) : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Notation : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\check{f} : x \mapsto f(-x)$.

[F] 131 Thm 40 : $\mathcal{F}$ est un morphisme de l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ dans l'algèbre multiplicative $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

[EA] ~112 Prop 41 : Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}[x \mapsto f(ax+b)] = e^{-ib\xi} \cdot \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ex 42 : • $\forall a>0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(\xi) = \mathcal{F}[x \mapsto \mathbb{1}_{[-1,1]}(\frac{x}{a})](\xi) = 2a \operatorname{sinc}(a\xi)$

[F] 130 • $\forall m \in \mathbb{R}$, $\forall \sigma > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)\right] = e^{-i\xi m}\, e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$.

Thm 43 (Formule d'inversion) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. [F] 133

On a $\|f - \frac{1}{2\pi}\check{\hat{\hat{f}}}\|_1 = 0$. En particulier, si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $f = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{\hat{f}}}$

Thm 44 : $\mathcal{F}$ est injective, et [admis] non surjective. [F] 133

Ex 45 : Soit $c>0$. On a $f : x \mapsto e^{-c|x|} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f} : \xi \mapsto \frac{2c}{c^2+\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$, [F] ~130

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\hat{f}}(x) = \pi e^{-c|x|}$.

Thm 46 (de Plancherel) : Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|\hat{f}\|_2$ [F] 137

En particulier, $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})] \subseteq L^2(\mathbb{R})$, et cette partie est dense. [EA] 122

Thm 47 : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme (toujours noté $\mathcal{F}$) de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, appelé transformation de Fourier-Plancherel.

Prop 48 : • $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi \cdot \check{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}$ DEV 2

• $\forall (f,g) \in L^2(\mathbb{R})^2$, $\hat{f} * \hat{g} = \widehat{fg} \times 2\pi$ [EA] 128

Rq 49 : Méthode de calcul : $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f] = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}[f \mathbb{1}_{[-n,n]}]$

Prop 50 (Formule d'inversion) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. [EA] ~130

On a $\|f - \frac{1}{2\pi}\check{\hat{\hat{f}}}\|_2 = 0$. En particulier, si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $f = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{\hat{f}}}$

Ex 51 : $\mathbb{1}_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $2\operatorname{sinc} = \widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}} \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\widehat{\operatorname{sinc}} = \pi\, \mathbb{1}_{[-1,1]}$. [EA] ~131

Références

[BP]

[F]

[CR]

[EA]