230 — Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

[G] 208

I - Notion de série numérique

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Defs 1: • On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On note $\sum_{n\geq 0} u_n$ cette série, et S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série.

• On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge. Le cas échéant, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ cette limite, que l'on appelle somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

• Lorsque $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, on appelle reste d'ordre n de $\sum_{n\geq 0} u_n$ la quantité $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$.

• Lorsqu'une série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

• On appelle nature d'une série son caractère convergeant ou divergeant.

Prop 2: Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ex 3: Une série de la forme $\sum_{n\geq p} a^n$, appelée série géométrique de raison $a \in \mathbb{C}$, converge si, et seulement si $|a|<1$. Le cas échéant, sa somme vaut $\frac{a^p}{1-a}$.

Prop 4: Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Rq 5: La réciproque est fausse : considérer $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$.

Def 6: Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

Prop 7: Soit $(v_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} \alpha u_n + v_n$ converge, et sa somme est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n + v_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ diverge

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} \alpha u_n$ diverge si, et seulement si $\alpha \neq 0$.

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ (Ex : $u_n = -v_n = n$).

Def 8: On appelle série télescopique une série de la forme $\sum_{n\geq 0} u_{n+1} - u_n$.

Prop 9: $(u_n)_{n\geq 0}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_{n+1} - u_n$ converge, auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$.

Ex 10: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et sa somme vaut 1.

Prop 11: Si $\sum_{n\geq 0} u_{2n}$ et $\sum_{n\geq 0} u_{2n+1}$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
Le cas échéant $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$

Ex 12: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

II - Séries à terme général positif

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites positives.

A - Critères de convergence et comparaison

Prop 13: $(S_n)_n$ est croissante. Par conséquent, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n)_n$ est majorée.

Thm 14: Si $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \leq v_n$, alors : [G] 209 210

• Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ou si $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, alors on ne peut rien dire (Ex : $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = n$)

Thm 15: Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ ont même nature. [G] 210

Rq 16: La positivité de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est capitale ! Considérer $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ [G] 223

Thm 17: Supposons que $u_n \sim v_n$. [G] 210

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

• Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Appli 18: Pour $f : x \longmapsto \ln(1+x)$, $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

[G] 212 <u>Thm 19</u> (comparaison série-intégrale) : Soit $\varphi : [p,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ positive, décroissante et continue par morceaux. La série $\sum_{n\geq p} \varphi(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_p^{+\infty} \varphi$ ont même nature.

De plus, $\sum_{n\geq p} \varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi$ converge.

<u>Rq 20</u> : La décroissance de φ est capitale ! Considérer $\varphi : x \mapsto |\sin(2\pi x)|$.

[G] 214 <u>Thm 21</u> (règle D'ALEMBERT) : Si $(u_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors :

- Si $L > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge
- Si $L < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
- Si $L = 1$, alors on ne peut rien dire (Ex : $u_n = \frac{1}{n}$: diverge, $u_n = \frac{1}{n^2}$: converge)

[G] 214 <u>Thm 22</u> (règle de CAUCHY) : Si $(u_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et si $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = L \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors la conclusion est la même que pour Thm20.

[G] 214 <u>Rq23</u> : Si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$, mais la réciproque est fausse (considérer $u_n = 2^n(2+(-1)^n)$).

B- Séries à terme positif usuelles

[G] 210 <u>Def 24</u> : Une série de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ est appelée série de RIEMANN.

[G] 212 Une série de la forme $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ $(\alpha\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R})$ est appelée série de BERTRAND.

[G] 210 <u>Thm 25</u> : • Critère de RIEMANN : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

[G] 213 • Critère de BERTRAND : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

<u>Ex26</u> : $e^{-n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$ converge.

[CR] 56 <u>Ex27</u> : Si $(X_n)_n$ est une suite de variables identiques et indépendantes, admettant un moment d'ordre 4, alors $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} E[X_1]$ (loi (très) faible des grands nombres)

[G] 217 <u>Prop 28</u> : • Si $\alpha > 1$, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$ DEV 1

• Si $\alpha < 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{-1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$

[FGN] 145 <u>Appli 29</u> : • $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

• Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $h_n := \min\{k\in\mathbb{N}^* \mid H_k \geq n\}$. Alors $\frac{h_{n+1}}{h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$

III - Séries à terme quelconque

A - Convergence absolue, semi-convergence

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

[G] 209 <u>Def 30</u> : On dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

[G] 209 <u>Prop 31</u> : Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

[G] 214 <u>Def 32</u> : Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, mais pas absolument, alors on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente.

<u>Rq 33</u> : Les critères D'ALEMBERT et de CAUCHY donne l'absolue convergence, mais ne permettent pas de détecter la semi-convergence.

<u>Prop 34</u> : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}(u_n)$ converge.

Le cas échéant, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

<u>Prop 35</u> : Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

[G] 209 <u>Prop 36</u> : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si, et seulement si elle est de Cauchy, ce qui s'écrit :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N\in\mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall p\in\mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon$.

[G] 216 Thm 37 (produit de Cauchy) : Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent absolument, alors $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)$ converge absolument, et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Prop 38 : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente, alors $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ divergent.

Thm 39 (de réarrangement de RIEMANN) : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente. Alors $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$: $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} = x$. Ce n'est pas le cas pour les séries absolument convergentes, qui sont par conséquent dites "commutativement convergentes".

B - Séries alternées, critère d'ABEL

[G] 214 Thm 40 (critère spécial des séries alternées) : Soit $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positive, décroissante et qui tend vers 0. Alors $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \alpha_n$ converge, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq \alpha_{n+1}$.

Ex 41 : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ convergent.

Rq 42 : La décroissance de $(\alpha_n)_n$ est capitale ! Considérer $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

[G] 215 Thm 43 (critère d'ABEL) : Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ positive, décroissante et qui tend vers 0, et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ telle que $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_n$ est bornée. Alors $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n \alpha_n$ converge.

[G] 216 Ex 44 : $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

[G] 215 Def 45 (transformation d'ABEL) : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Effectuer une transformation d'Abel, c'est écrire $\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) v_k = u_n v_n - u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k (v_k - v_{k+1})$.

IV - Autre techniques de calcul de sommes de séries

A - Utilisation des séries entières

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

[G] 247 Def 46 : On appelle rayon de convergence de $(a_n)_n$ la quantité $R(a_n) = \sup\{r>0 \mid (a_n r^n)_n \in \ell^\infty\} \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

[G] 247 Prop 47 : Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < R(a_n)$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

[G] 247 Rq 48 : On ne peut rien conclure si $|z| = R(a_n)$. Considérer $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = 1$

Thm 49 (d'ABEL angulaire) : Supposons que $R(a_n) \geq 1$ et que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. [G] 263
Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, posons $\Delta_{\theta_0} = \{z \in B\ ,1) \mid \exists \rho > 0 : \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] : z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$
Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{z\to 1,\, z\in\Delta_{\theta_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

FIGURE

Ex 50 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ [G] 264

B - Utilisation des séries de FOURIER

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable et 2π-périodique.

Def 51 : • On appelle n^e coefficients de FOURIER trigonométriques de f les quantités : $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. [G] 268

• On appelle série de FOURIER de f la suite : [G] 269

$$\left(S_N(f) : t \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right)_N$$

Prop 52 : Si f est paire (resp. impaire), alors $\forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0$ (resp. $a_n(f) = 0$). [G] 269

Thm 53 (de DIRICHLET) : Soit $x \in [0, 2\pi]$. Si f admet en x à gauche et à droite une limite et une dérivée, alors $S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. [G] 271

Thm 54 (de PARSEVAL) : Si f est de carré intégrable, alors $S_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{L^2} f$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2}$. [G] 270

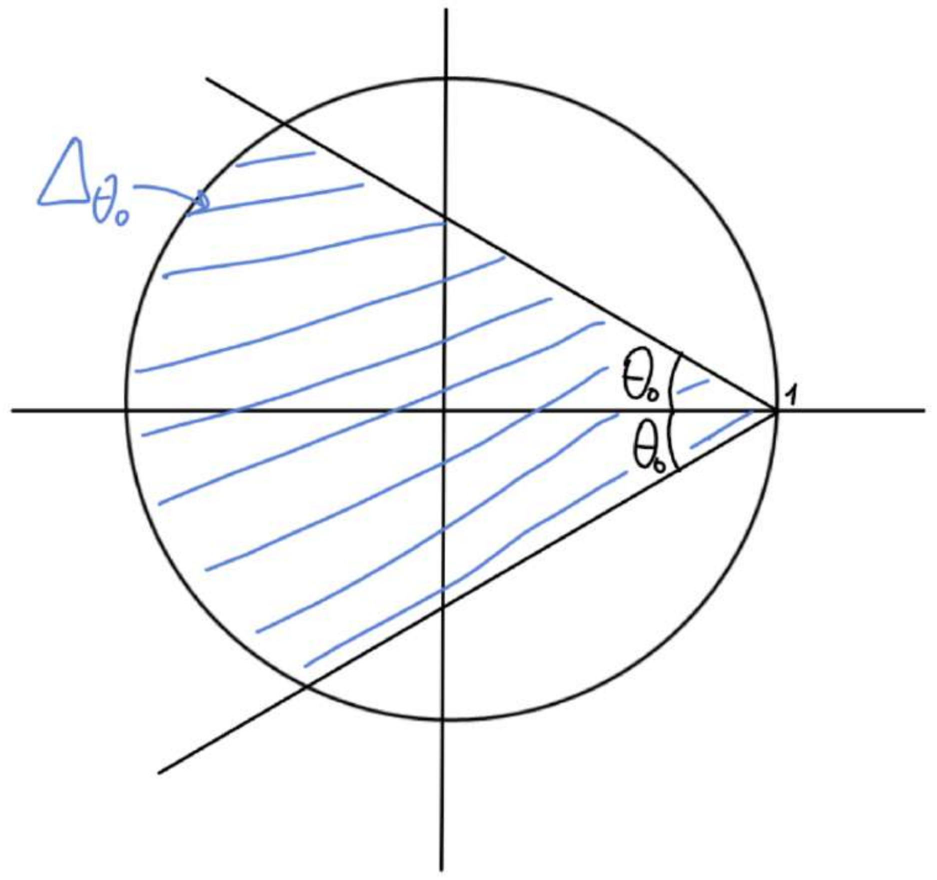
Appli 55 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. [G] 272
$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x = \pi \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $x = 0 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, Parseval $\to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Thm 56 : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de BERNOULLI, i.e. l'unique suite vérifiant $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ pour z proche de 0. [FGN2] 910

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

DEV 2

FIGURE 1 : Théorème d'Abel angulaire



RÉFÉRENCES

[G] : Les maths en tête – Analyse (Xavier Gourdon) [3e édition]

([EA] : Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. (Mohammed El Amrani))

[CR] : Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques (Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch)

[B] : Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J. & L. Bernis)

[FGN] : Exercices de mathématiques - Oraux X-ENS - Analyse 2 (Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas)