Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

229

I - Fonctions monotones

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

A - Définitions et caractérisations

[RDO] 118 <u>Def 1</u> : On dit que f est :

- (strictement) croissante si f conserve les inégalités (strictes), i.e. si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$
$$(\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$$
- (strictement) décroissante si f renverse les inégalités (strictes)
- (strictement) monotone si f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

[RDO] 119 <u>Prop 2</u> :
- Si f et $g : I \to \mathbb{R}$ sont (dé)croissantes, alors pour tout $\lambda \geq 0$, $f + \lambda g$ est (dé)croissante.
- La composée de deux fonctions de même monotonie est croissante. La composée de deux fonctions de monotonies inverses est décroissante.

<u>Cor 3</u> : f est décroissante $\Leftrightarrow$ $-f$ est croissante.

[Rb] 205-206 <u>Prop 4</u> : Supposons f continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.
- f est croissante $\Leftrightarrow$ $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$
- f est strictement croissante $\Leftrightarrow$ $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$ et $\overbrace{\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\}}^{\circ} = \emptyset$.

[Rb] 206 <u>Cor 5</u> : f est constante sur I $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ sur I

<u>Ex 6</u> : $\exp$, $\ln$, $\sqrt{\cdot}$, $x \mapsto x^3$ sont croissantes

<u>Cex 7</u> : $f : x \mapsto \frac{-1}{x}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$ alors que $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

B - Propriétés spécifiques des fonctions monotones

On note $\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$.

<u>Thm 8</u> (de la limite monotone) : Soit $x \in \mathring{I}$. Supposons f croissante. [RDO] 119

- $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = \inf f(I)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} f(x) = \sup f(I)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- $f(x_0^+) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \inf f(I \cap]x_0; +\infty[)$ existe et est fini.
  On l'appelle limite à droite de f en x_0.
- $f(x_0^-) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \sup f(I \cap]-\infty; x_0[)$ existe et est fini.
  On l'appelle limite à droite de f en x_0.
- $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$

<u>Cor 9</u> : L'ensemble des points de discontinuité est fini ou dénombrable. [RDO] 120

<u>Ex 10</u> : Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, $t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$. La fonction F_X est croissante et continue à droite en tout point (et admet une limite à gauche en tout point : on dit qu'elle est càdlàg). On peut définir $F_X^- :]0,1[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F_X(t) \geq y\}$. [CR] 23-24

<u>Prop 11</u> : Si f est monotone, alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

<u>Cex 12</u> : $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ envoie $\mathbb{R}$ sur $[0,1[$, mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

[RDO] 118 **Thm 13** : Si f est continue sur I, alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

C - Suites de fonctions monotones

Prop 14 : La limite simple d'une suite de fonctions (dé)croissantes est (dé)croissante.

[Go] 238 **Thm 15** (de Dini) : Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues croissantes sur un segment $[a,b]$ et f continue sur $[a,b]$. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f (sur $[a,b]$).

I - Fonctions convexes

A - Cas des fonctions unaires

On garde les notations de la première partie. FIGURE 1

[Rb] 225 **Def 16** : On dit que f est convexe si elle est en-dessous de ses cordes, i.e. :

$$\forall (a,b)\in I^2,\ \forall \lambda\in[0,1],\quad f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

On dit que f est strictement convexe si :

$$\forall (a,b)\in A^2,\ \forall \lambda\in]0,1[,\ a\neq b \Rightarrow f(\lambda a+(1-\lambda)b)< \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

Rq 17 : Si f est convexe, alors : $\forall (a_1,\dots,a_n)\in A^n$, $\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A^n$,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow f\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\Big)\leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i).$$

[Rb] 225 **Prop 18** : f est convexe si, et seulement si son épigraphe $\{(x,y)\in A\times\mathbb{R} \mid y\geqslant f(x)\}$ est convexe.

[Rb] 232 236 238 **Thm 19** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I\to\mathbb{R}$. Sont équivalentes :

- f est convexe
- $\forall a\in I$, $\tau_a : x\longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$
- $\forall (a,b,c)\in I^3$, $a<b<c \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ (inégalité des 3 pentes) FIGURE 2
- (Si f est dérivable) $\forall a\in I$, $\forall x\in I$, $f(x)\geqslant f(a)+f'(a)(x-a)$ (f est au-dessus de ses tangentes) FIGURE 1
- (Si f est dérivable) f' est croissante sur I
- (Si f est deux fois dérivable) $f''\geqslant 0$ sur I

Ex 20 : Fonctions usuelles convexes : $\exp$, $-\ln$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $id_{\mathbb{R}}^{2n}$, $-\sqrt{\cdot}$, $-\sin_{|[0,\frac{\pi}{2}]}$.

Thm 21 : Supposons f convexe. Soit $(a,b)\in \mathring{I}^2$ tel que $a<b$. [Rb] 235

- f est continue sur $\mathring{I}$
- f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$. On note f'_d et f'_g les application dérivée à droite et à gauche.
- $f'_g(a)\leqslant f'_d(a)\leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_g(b)\leqslant f'_d(b)$ FIGURE 3

Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ un ouvert convexe, soit $f : U\to\mathbb{R}$.

Thm 22 : Supposons f de classe C^1. Les assertions suivantes sont équivalentes : [Rv] 127 329 [Rb] 237

- f est convexe
- $\forall (u,v)\in U^2$, $f(u)-f(v)\geqslant df(u)(v-u)$
- $\forall (u,v)\in U^2$, $\langle \nabla f(u)-\nabla f(v) \mid u-v\rangle\geqslant 0$
- (Si f est de classe C^2) $\forall (u,v)\in U^2$, ${}^t v\, \nabla^2 f(u)\, v\geqslant 0$

Prop 23 : Si f est différentiable en $x_0\in U$ et admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0)=0$. [Rb] 210

Rq 24 : La réciproque est fausse en général : considérer $x\mapsto x^3$. [Rb] 210

Prop 25 : Si f est convexe, différentiable en $x_0\in U$ et si $f'(x_0)=0$, alors f admet un minimum global en x_0. [Rb] 234

B - Inégalités de convexité

[Rb] 239 **Ex 26** : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$. Application : lemme de Borel-Cantelli.

[Rb] 239 **Ex 27** : $\forall x > 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$. Application :

[Rb] 239 **Ex 28** : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi} x$. Application :

[Rb] 242 **Prop 29** (inégalité arithmético-géométrique) :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n,\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

[Rb] 239 **Prop 30** (inégalité de Hölder) : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n,\ \forall (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n,$
$$\forall (p,q) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

III - Un exemple et une application

A - La fonction Γ d'Euler

[Go] 315 **Def 31** : On définit pour $x > 0$: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$

Thm 32 :
1. Γ est lisse
2. Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes
3. Variations de Γ
4. $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
5. $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$
6. $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ (formule d'Euler-Gauss)

DEV 1

B - Le système proies-prédateurs de Lotka et Volterra

[BeT] 204 Soient a, b, c et d strictement positifs. On considère le système :
$$(S) : \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$
avec les conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$.

DEV 2 : Portrait de phase des solutions maximales.

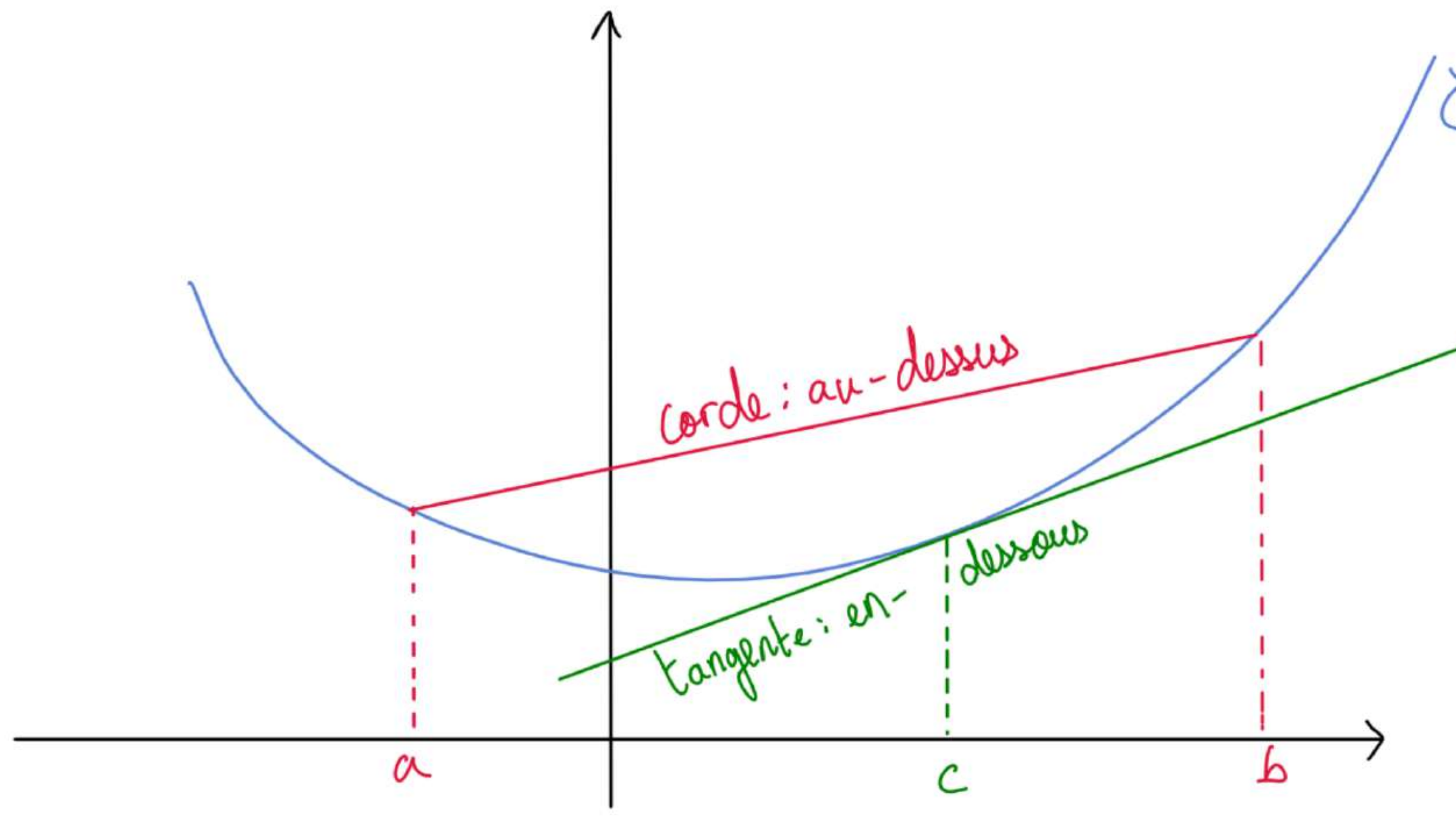
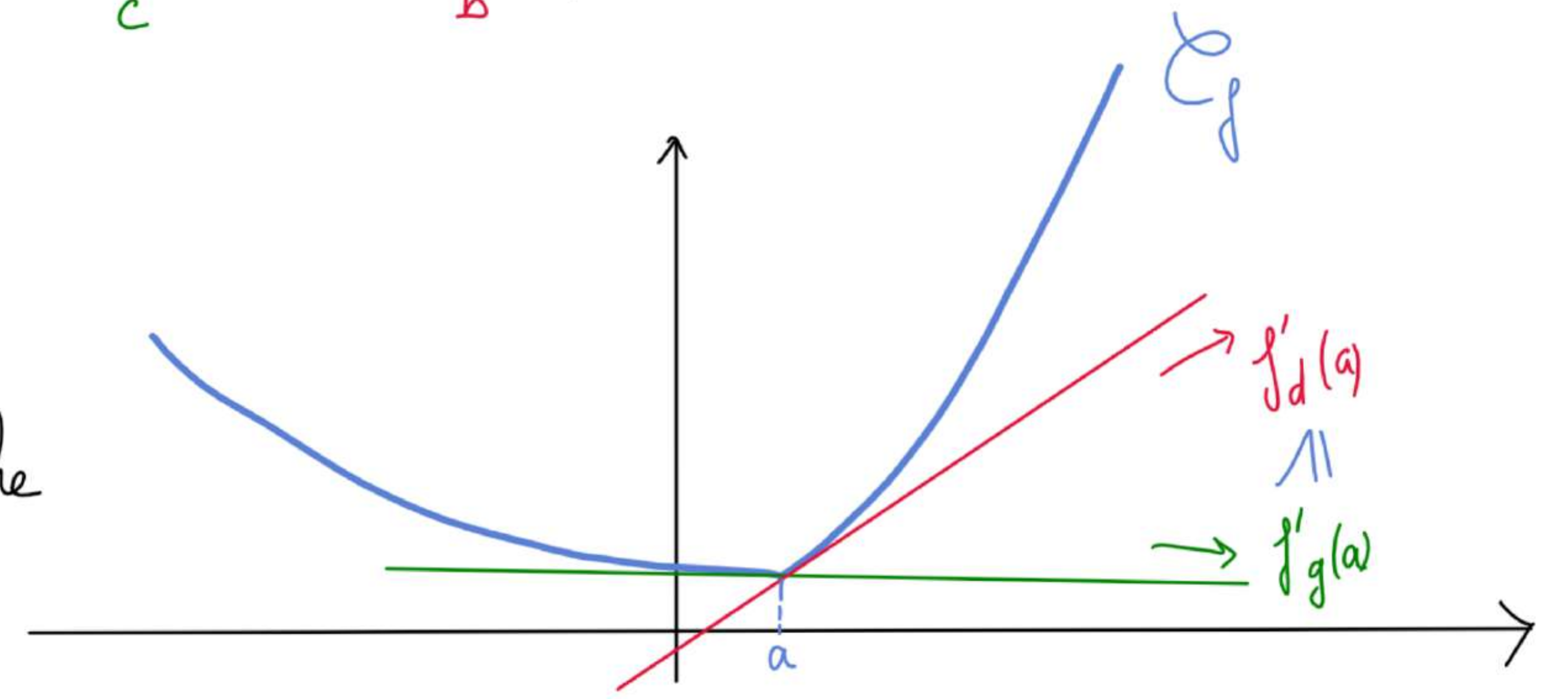


FIGURE 1
Convexité, cordes et tangentes

FIGURE 2
Dérivées à droite et à gauche



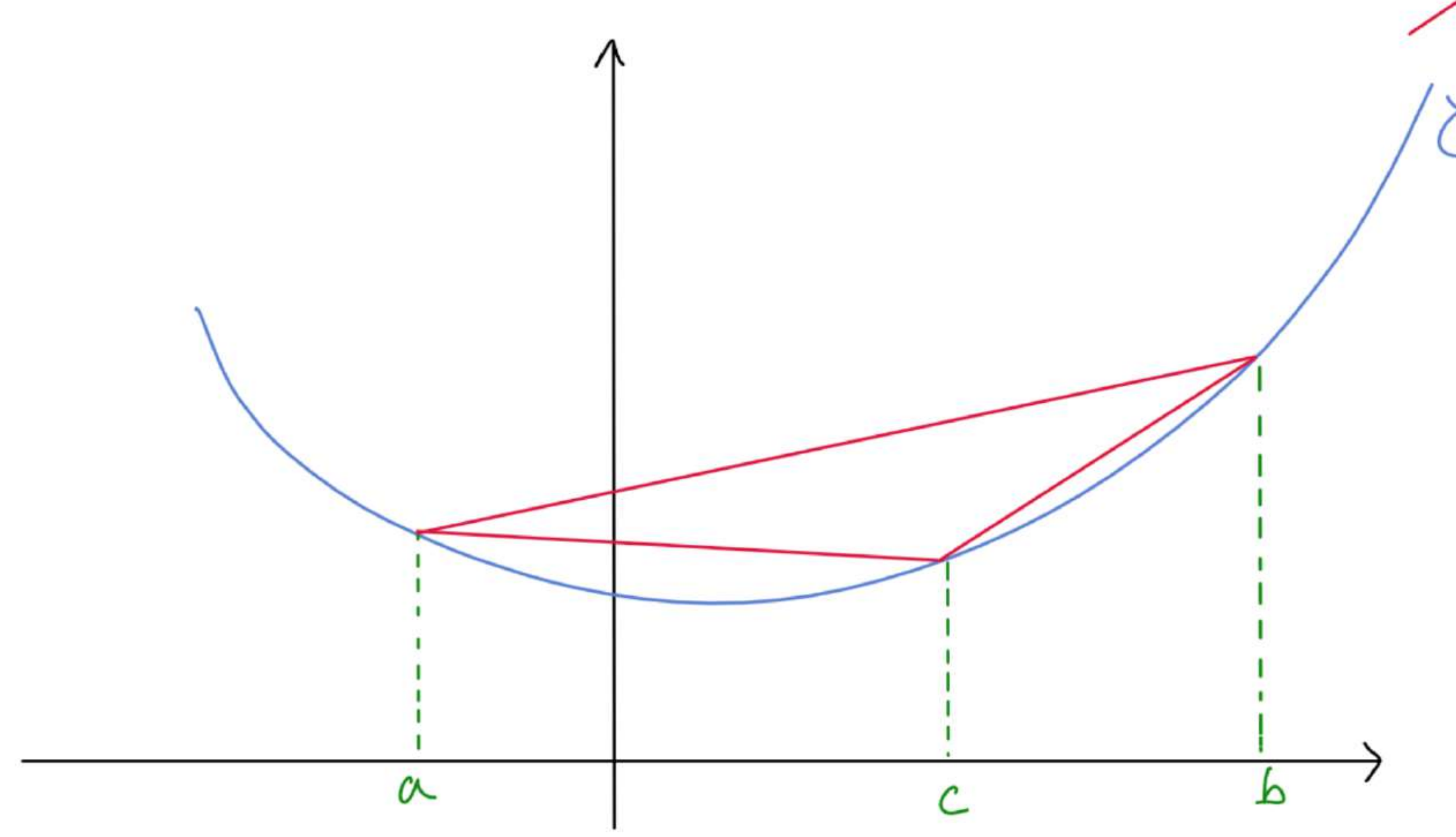


FIGURE 3
Inégalité des 3 pentes

Références

[Rb]
[RDO]
[Go]
[Rv]
[CR]