228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Dans cette leçon, I et J sont des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

I - Classes de régularité des fonctions numériques

A - Définitions, premiers exemples

[Ro] 162 Def 1 : ▸ On dit que f est *continue en a* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

On note $C^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I, i.e. continues en tout point de I.

[Ro] 13 ▸ On dit que f est *uniformément continue sur I* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

On note $UC^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues sur I.

[Ro] 198 ▸ On dit que f est *dérivable à gauche (resp. à droite) en a* si $f'_g(a) := \lim\limits_{\substack{x \to a^- \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ (resp. $f'_d(a) := \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$) existe et est finie. Le réel $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) est appelé *dérivée à gauche (resp. à droite) de f en a*.

[Ro] 197 ▸ On dit que f est *dérivable en $a \in \mathring{I}$* si f est dérivable à droite et à gauche en a, et si $f'_g(a) = f'_d(a)$. Le réel $f'(a) := f'_g(a) = f'_d(a)$ est appelé *dérivée de f en a*.
On note $D^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ *dérivables sur I*, i.e. *dérivables* en tout point de I. Si f est dérivable sur I, alors on dispose de la *dérivée de f*, qui est la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$; $a \mapsto f'(a)$.

[Ro] 201 ▸ On dit que f est *n fois dérivable en a* s'il existe un voisinage $V \subseteq I$ de a tel que f, sa dérivée $f' =: f^{(1)}$, sa dérivée seconde $f'' = f^{(2)} =: (f')'$, etc. jusqu'à sa dérivée $(n-2)$-ième $f^{(n-2)}$ sont dérivables sur V, et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, de dérivée $f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$. On note $D^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I. Par convention, $f^{(0)} = f$.

▸ On note $C^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont dérivables sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I. Une fonction de $C^n(I,\mathbb{R})$ est dite *de classe C^n sur I*. [Ro] 201

Rq 2 : La valeur de la dérivée de f en a correspond au coefficient directeur de la tangente au graphe de f en a. Ainsi, f n'est pas dérivable en a si cette tangente n'existe pas, ou est verticale.

Ex 3 : ▸ Les fonctions rationnelles, trigonométriques, exp, ln, sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définition.

▸ $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet à droite et à gauche une dérivée en 0, mais n'est pas dérivable en 0 (la tangente n'existe pas).

▸ $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (la tangente est verticale).

▸ $f : x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in D^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

▸ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto ax+b \in UC^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

▸ $x \longmapsto x^2 \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus UC^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

B - Propriétés principales

Prop 4 (caractérisation séquentielle de la continuité) [Ro] 165

f est continue en $a \iff \forall (a_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \quad a_n \longrightarrow a \Rightarrow f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

Prop 5 : ▸ $C^\infty(I,\mathbb{R}) \subsetneq \dots \subsetneq C^n(I,\mathbb{R}) \subsetneq D^n(I,\mathbb{R}) \subsetneq \dots \subsetneq D^1(I,\mathbb{R}) \subsetneq C^0(I,\mathbb{R})$ [Ro] 195 ?

▸ f dérivable en $a \Rightarrow$ continue en a ▸ $UC^0(I,\mathbb{R}) \subseteq C^0(I,\mathbb{R})$.

Prop 6 : Si f et g sont dérivables en a, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a, et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$. [Ro] 202

Thm 7 (formule de LEIBNIZ) : Si f et g sont n fois dérivables en a, alors fg est n fois dérivable en a, et $(fg)^{(n)}(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$ [Ro] 202

Cor 8 : $C^n(I,\mathbb{R})$ et $D^n(I,\mathbb{R})$ sont des algèbres de multiplication.

[R0] 203 Prop 9 : Si f est dérivable en a et g en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a, de dérivée $(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'\circ f(a)$.

[R0] 203 Prop 10 : Si f est bijective, dérivable en a, et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en a, avec $(f^{-1})'(a) = 1 / f'\circ f^{-1}(a)$.

[R0] 170 Thm 11 (de HEINE) : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$, $C^0([a,b],\mathbb{R}) = \mathcal{UC}^0([a,b],\mathbb{R})$.

[R0] ~171 Appli 12 : Les fonctions périodiques, ou admettant une limite finie en $\pm\infty$, sont uniformément continues.

[R0] 172 Thm 13 (des bornes atteintes) : Une fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Appli 14 : Si $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$, alors f admet un minimum global.

[R0] 45 Thm 15 (de WEIERSTRASS) : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$. Tout fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Appli 16 : $\{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0\} = \{0\}$.

[R0] 173 Thm 17 (des valeurs intermédiaires) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Appli 18 : Tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle.

C - Des extrema locaux aux formules de TAYLOR

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $[a,b] \subseteq I$.

[R0] 210 Prop 19 (condition nécessaire d'extremum local) : Si f est dérivable en $x_0 \in]a,b[$ et si f admet en x_0 un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Jusqu'à Thm 24, on suppose que $f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \cap D^1(]a,b[,\mathbb{R})$.

[R0] 257 Thm 20 (de ROLLE) : $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$.

[R0] 258 Thm 21 (Égalité des accroissements finis) : $\exists c \in]a,b[: f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

[R0] 261 Cor 22 : f est croissante si, et seulement si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$.

Thm 23 (de DARBOUX) : Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors $f'(I)$ est un intervalle (sans que f' soit nécessairement continue !). [R0] 259 277

Thm 24 (Inégalité des accroissements finis) : S'il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in]a,b[$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ [R0] 259

Def 25 : Soit $\lambda \geq 0$. On dit que f est λ-lipschitzienne sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x)-f(y)| \leq \lambda |x-y|$$

Thm 26 (Inégalité des accroissements finis) : Si $f \in D^1(I,\mathbb{R})$ et si $\exists \lambda > 0$: $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \lambda$, alors f est λ-lipschitzienne sur I.

Thm 27 (formule de TAYLOR avec reste intégral) : Si $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$, alors : [R0] 288

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

Thm 28 (formule de TAYLOR-YOUNG) : Si $f \in C^n(I,\mathbb{R})$, alors : [R0] 292

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Appli 29 : Si $f \in C^2(I,\mathbb{R})$ et si $f''(a) > 0$, alors la courbe de f est au-dessus de sa tangente en a sur un voisinage de a. [R0] ~293

II - Cas de fonctions particulières

A - Fonctions monotones, convexes, lipschitziennes

Def 30 : On dit que f est lipschitzienne (sur I) s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que f est λ-lipschitzienne sur I (Def 25).

Prop 31 : Si f est lipschitzienne sur I, alors $f \in \mathcal{UC}^0(I,\mathbb{R})$.

Thm 32 (de RADEMACHER) : f est lipschitzienne sur I si, et seulement s'il existe $g \in \mathcal{L}^\infty(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in I$, $f(x) - f(y) = \int_x^y g(t)\,dt$.

Cor 33 : Une fonction lipschitzienne est presque partout dérivable.

[R₀] 225 **Def 34** : On dit que f est convexe (sur I) si sa courbe représentative est en-dessous de toutes ses cordes, i.e. si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

[R₀] 231 (238) **Thm 35** : Si f est convexe, alors pour tout $[a,b] \subseteq \mathring{I}$, f est lipschitzienne sur $[a,b]$. En particulier, f est continue sur $\mathring{I}$.

[R₀] 235 **Thm 36** : Si f est convexe, alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$, et pour tout $(a,b) \in \mathring{I}^2$ tel que $a<b$:

$$f_g'(a) \leq f_d'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_g'(b) \leq f_d'(b)$$

[R₀] 236-238 **Thm 37** : Les points suivants caractérisent la convexité de f :

- $f \in C^0(I,\mathbb{R})$ et f_d' est définie et croissante sur I,
- (Si $f \in D^1(I,\mathbb{R})$) f' est croissante sur I
- (Si $f \in D^1(I,\mathbb{R})$) la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente en tout point de I
- (Si $f \in D^2(I,\mathbb{R})$) $f'' \geq 0$ sur I

[R₀] 175 **Prop 38** : Si f est monotone et si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I

[R₀] 211 **Cor 39** : Si f est convexe et dérivable, alors f est de classe C^1 sur I.

B- Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre

Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : t \longmapsto \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$.

[F] 93 **Thm 40** (de continuité sous le signe intégrale) : Soit $t_0 \in I$. Si :

- $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable sur X,
- Pour μ-presque tout $x \in X$, $t \longmapsto f(t,x)$ est continue en t_0,
- $\exists \varphi \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall t \in I$, pour μ-presque tout $x \in X$, $|f(t,x)| \leq \varphi(x)$.

Alors F est bien définie sur I et continue en t_0.

Thm 41 (de dérivation sous le signe intégrale) : Si : [F] 94

- $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(t,x) \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$,
- Pour μ-presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I, de dérivée $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$,
- $\exists \varphi \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$: $\forall t \in I$, pour μ-presque tout $x \in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \varphi(x)$.

alors F est bien définie et dérivable sur I, de dérivée :

$$F' : t \longmapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu(x)$$

Ex 42 : Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ par transformée de LAPLACE. **DEV 1** [F] 99

[B] 258 [Go] 315 **Ex 43** : Étude de $\Gamma : x > 0 \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$. **DEV 2**

III – Passages à la limite

Thm 44 (de la double limite) : Soit $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur I. Soit $a \in \bar{I}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, et : [EA] 146

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Cor 45 : Si de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a. [EA] 146

Cor 46 : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in D^1(I,\mathbb{R})$, $\forall t \in I$, $f_n(t) \longrightarrow f(t)$, et $f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, alors f est dérivable sur D, et $f' = g$ et $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. [EA] 148

Rq 47 : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in D^2(I,\mathbb{R})$, si $\forall t \in I$, $f_n(t) \longrightarrow f(t)$, $f_n'(t) \longrightarrow g(t)$ et $f_n'' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} h$, alors $h = g'$ et $f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, donc $g = f'$ (et $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$), puis $h = f''$. Par récurrence, cela fonctionne pour n'importe quel ordre de dérivation.

Appli 48 (Fonction de VAN DER WAERDEN) soit φ défini par $\varphi_{|[-1,1]} = |\cdot|$ et étendue par 2-périodicité à $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ est continue mais non dérivable en tout point. [R₀] 198

FIGURE 1 : Dérivée et tangente

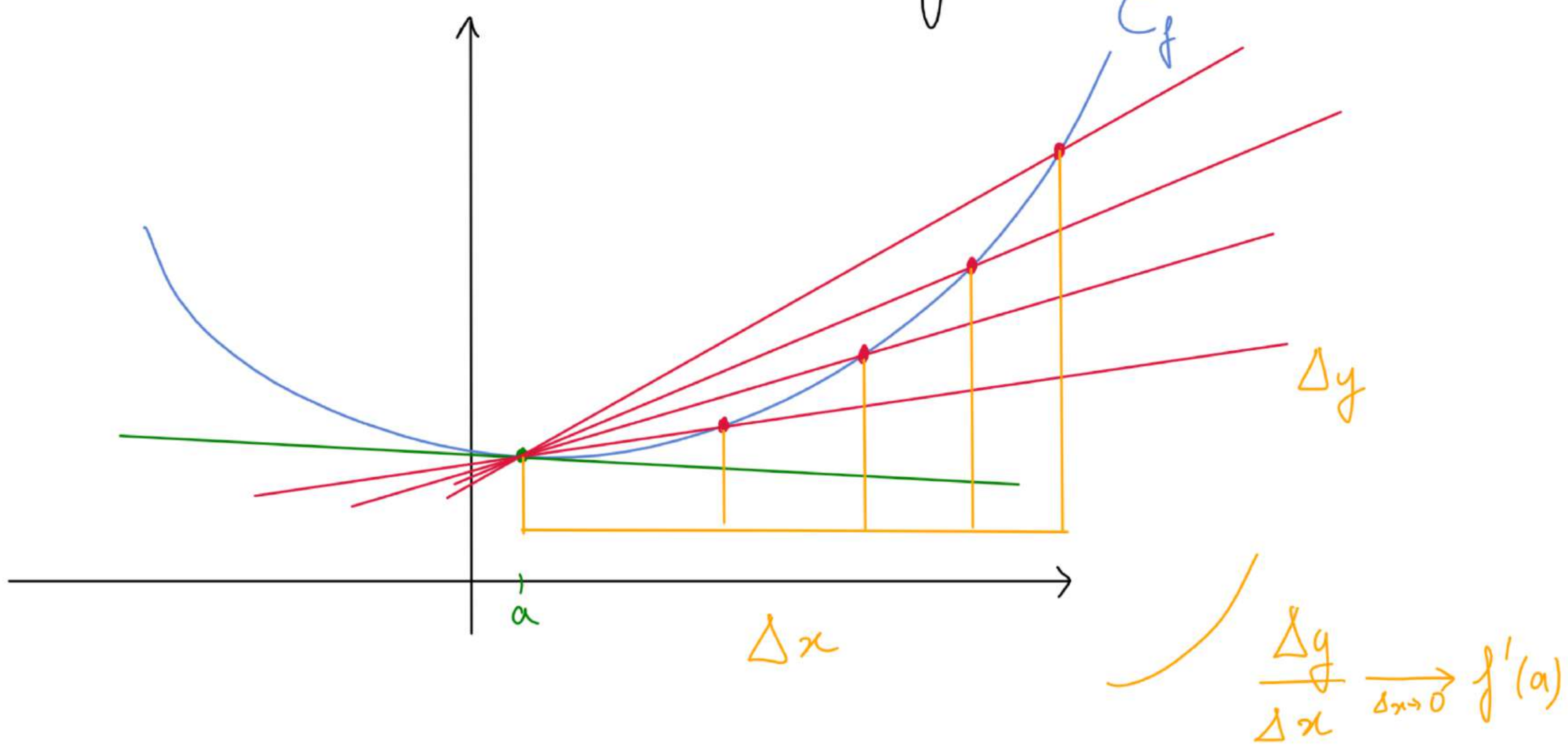


FIGURE 2 : Théorème de Rolle

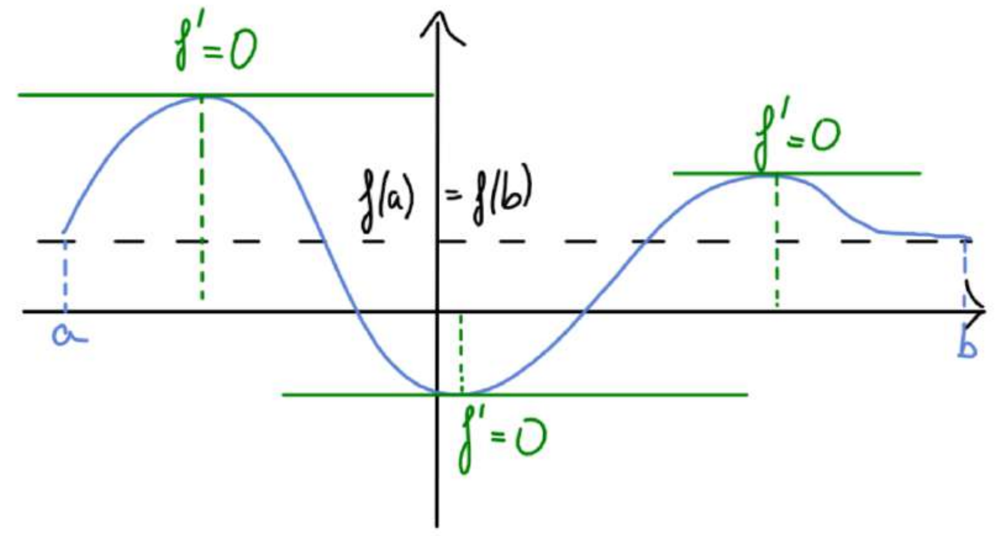


FIGURE 3 : Égalité des accroissements finis

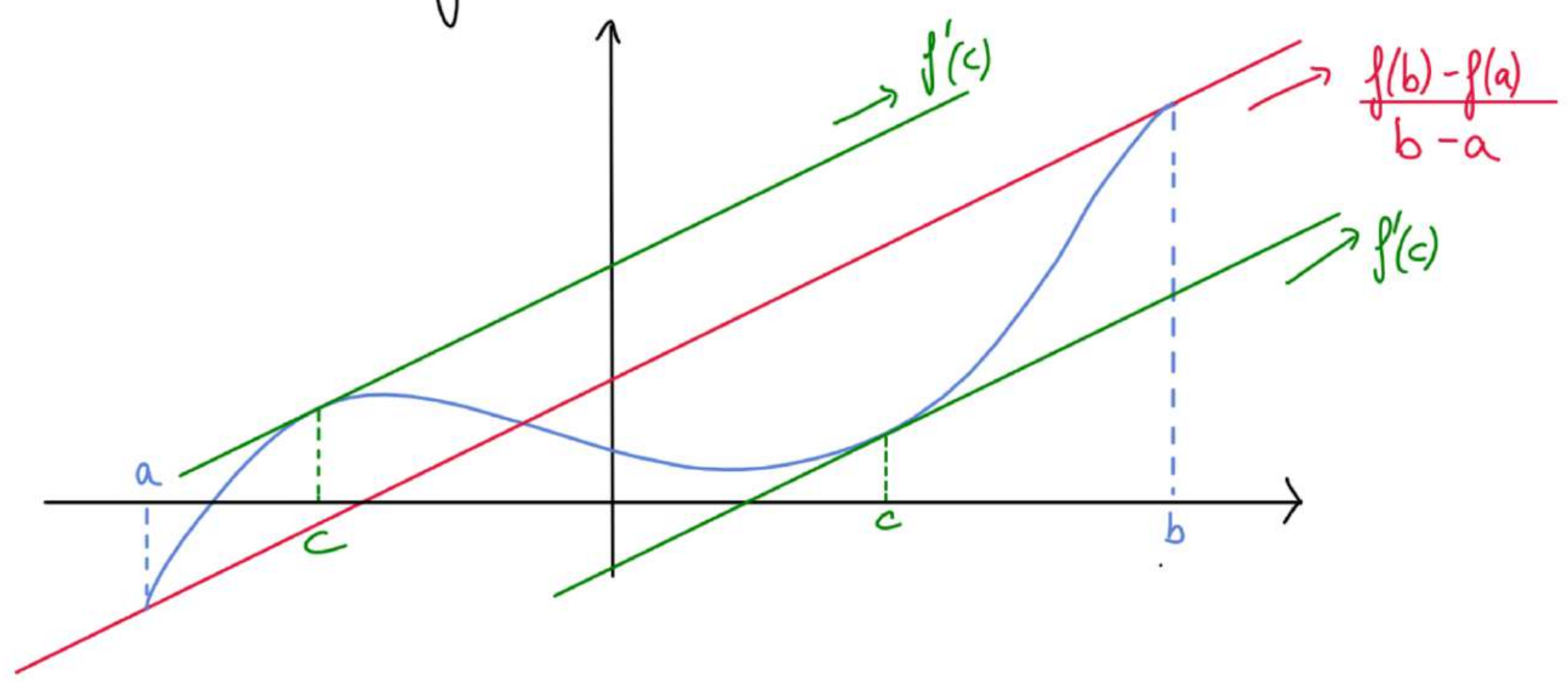


FIGURE 4 : Fonctions convexes

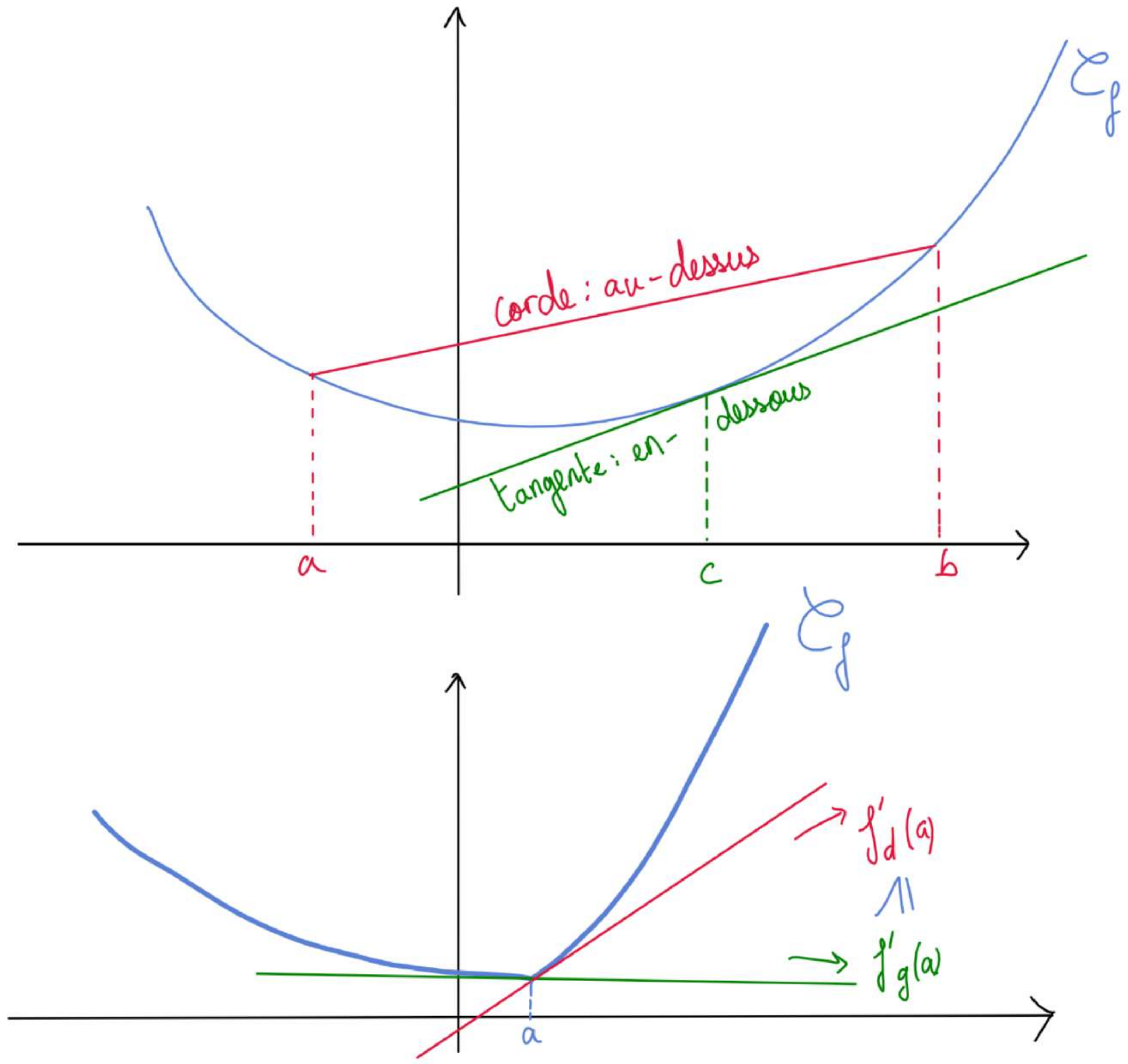
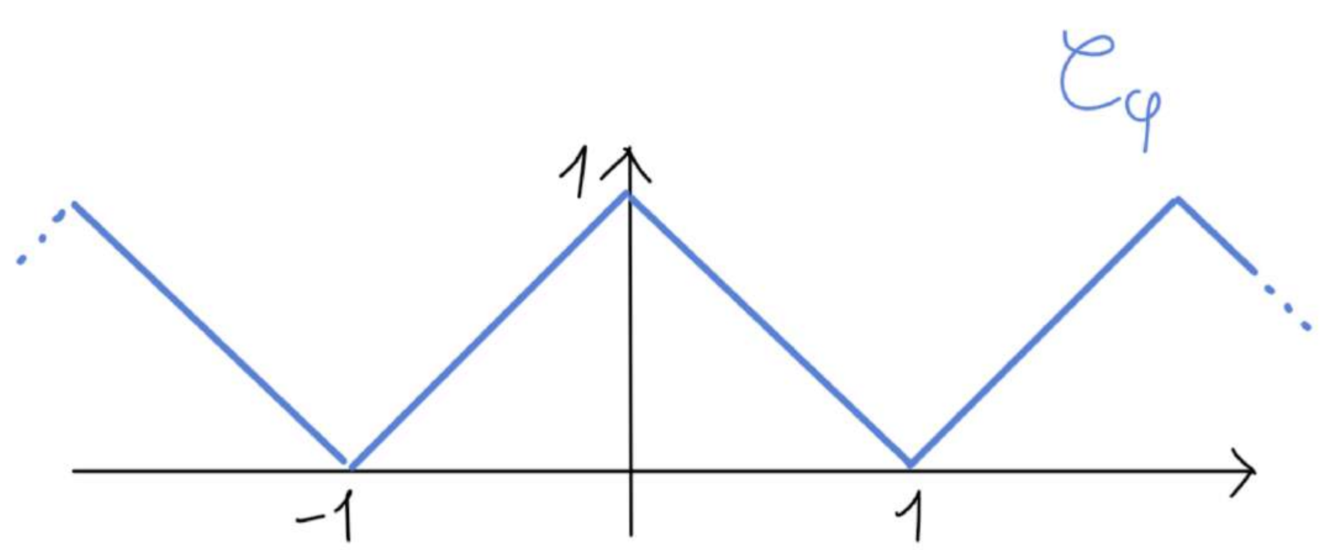


FIGURE 5



RÉFÉRENCES

[Ro] : Éléments d'analyse réelle [2e édition] (Jean-Étienne ROMBALDI)

[EA] : Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions (Mohamed EL-AMRANI)

[F] : Calcul intégral (Jacques FARAUT)

[B] : Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J & L BERNIS)

[Go] : Gourdon [3e édition]