226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

# I - Suites récurrentes

[Go] 200 **Def 1** : Soit $A$ un ensemble non vide. Une suite récurrente d'ordre $p$ d'éléments de $A$ est une suite $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in A$ et telle qu'il existe $f : A^p \longrightarrow A$ telle que $\forall n \geqslant p,\ u_n = f(u_{n-1}, \cdots, u_{n-p})$.

## A - Quelques situations dans le cas réel d'ordre 1

Dans ce paragraphe, on fixe $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide, $f : A \to A$ et $a \in A$. On cherche à étudier la suite $\{u_0 = a\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

[Go] 200 **Prop 2** : On suppose que $A$ est un intervalle.

- Si $f$ est croissante sur $A$, alors $(u_n)_n$ est monotone, et son sens de variation est donné par le signe de $u_1 - u_0$.
- Si $f$ est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante. De là, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et de monotonie contraire.

[Bé] 150 FIGURE 1 : Représentation des trajectoires dans les deux situations ci-dessus, pour $x \longmapsto x + e^{-x^2}$ et pour $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

[Bé] 146 **Ex 3** : Soit $b > 0$, supposons que $A = [0,b]$, et que :

- $f$ est est continue et croissante
- $f(0) = 0$ et $\forall x \in ]0,b],\ f(x) < x$
- Il existe $\lambda > 0$ et $r > 1$ tels que $f(x) = x - \lambda x^r + \underset{x\to 0}{o}(x^r)$

Alors $u_n \sim (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

DEV 1

[Bé] 148 **Appli 4** : Pour $f : x \longmapsto \ln(1+x)$, on a $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

[Go] 228 **Appli 5** : Même étude avec $f = \sin$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

## B - Suites récurrentes linéaires

**Def/Prop 6** : Supposons que $f : x \longmapsto ax + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. [Go] 201

- Si $a = 1$, alors on dit que $(u_n)_n$ est arithmétique de raison $b$. Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$.
- Si $b = 0$, alors on dit que $(u_n)_n$ est géométrique de raison $a$. Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 a^n$.
- Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, alors on dit que $(u_n)_n$ est arithmético-géométrique. Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{b}{1-a} + a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$.

**Prop 7** : Supposons que $f : (x_1, \dots, x_k) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$, $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ ; [Go] 202
de sorte que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = f(u_{n+k-1}, \cdots, u_n)$. On note $P = X^k - \sum_{i=1}^{k} a_i X^{i-1}$ : on l'appelle polynôme caractéristique de $(u_n)_n$. Dans $\mathbb{C}[X]$, écrivons $P$ sous sa forme factorisée : $P = \prod_{i=1}^{s} (X - r_i)^{m_i}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = P_1(n) r_1^n + \cdots + P_s(n) r_s^n$$

où les $P_i \in \mathbb{C}[X]$ sont de degré $< m_i$ et dépendent uniquement des $k$ premières valeurs de $k$.

**Prop 8** : Cas particulier $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$. Si son polynôme caractéristique a deux racines non réelles conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$, alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$. [Go] 202

**Ex 9** :

- Si $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).$$
- Si $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-2n)(-1)^n$$
- Si $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n\left(3\cos\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(n\tfrac{\pi}{3}\right)\right)$$

## C- Suites vectorielles

Dans ce paragraphe, on se donne $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, et on s'intéresse aux suites récurrentes de la forme $X_{n+1} = AX_n$.

Prop 10 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

[Go] 180 Lemme 11 (déterminant circulant) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, posons $Q(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & & \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} Q(\omega^k)$$

Appli 12 : Soient $z_1, \dots, z_n$ des complexes qui sont les affixes des points $M_1, \dots, M_n$. On définit une suite de polygônes du plan comme suit :
- $P_0 = M_1 \cdots M_n$
- Pour $n \geq 1$, $P_n$ est le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de $P_{n-1}$.

FIGURE 2

Alors $(P_n)_n$ converge vers l'isobarycentre de $P_0$ DEV 2

Prop 13 : Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente linéaire d'ordre $k$, de relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = a_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + a_0 u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & & a_{k-1} \end{pmatrix}, \text{ de sorte que } X_{n+1} = AX_n.$$

Expliciter $(u_n)_n$ est donc équivalent à expliciter $(X_n)_n$ : on s'est donc ramenés à un problème de suite d'ordre 1.

## II - Points fixes

Dans ce paragraphe, $(E,d)$ est un espace métrique complet, $A$ est une partie non vide de $E$, et $f : E \longrightarrow A$. On s'intéresse à $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Prop 14 : Si $(u_n)_n$ converge vers $u^* \in E$ et que $f$ est continue en $u^*$, alors $u^*$ est un point fixe de $f$.

Ex 15 :
- $A = \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, $u_0 > 0$ : $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe de $f$.
- $A = \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $u_0 = 1$ : $(u_n)_n$ converge, mais pas vers un point fixe de $f$. [Da] 153

Thm 16 (du point fixe de Banach-Picard) : Si $A$ est fermée et si $f$ est contractante (i.e. $k$-lipschitzienne avec $k<1$), alors $f$ admet un unique point fixe, et $(u_n)_n$ converge vers ce point fixe. [Rb] 330

Prop 17 : Le théorème précédent reste vrai s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p$ est contractante, plutôt que $f$. [Rb] 332

## III - Méthodes itératives pour la résolution de problèmes

### A - Recherche des zéros d'une fonction

Thm 18 (méthode de Newton, cas réel) : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, soit $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) f''(x) \neq 0$. Dans ces conditions, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x^* \in ]a,b[$. De plus, pour tout $x_0 \in [a,b[$ [Rb] 345 tel que $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$, la suite récurrente définie par la relations $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est monotone, converge vers $x^*$, et l'erreur est majorée par : $|x_n - x^*| \leq (b-a)\left(\frac{b-a}{2}\,\frac{M_2}{m_1}\right)^{2^n-1}$

où $m_1 = \inf_{[a,b]} |f'|$ et $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$. FIGURE 3

[BMP] 23 **Thm 19** (méthode de NEWTON, cas $\mathbb{R}^n$) : Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\Omega$ telle que $df$ est inversible en tout point de $\Omega$, et $a$ tel que $f(a) = 0$. Alors la suite définie par

$$x_0 \in \Omega \ ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - df(x_n)^{-1} \circ f(x_n)$$

converge vers $a$.

[Rb] 348 ? **Ex 20** : ▸ Recherche approchée des racines d'un polynôme.

▸ Méthode de HÉRON : soit $a > 0$. La suite définie par :

$$u_0 = 1 \ ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

converge vers $\sqrt{a}$ : elle correspond à $f : x \longmapsto x^2 + a$.

[BMP] 23 **Thm 21** (descente de gradient à pas fixe) : Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ de classe $C^1$, $\alpha > 0$ et $x_0 \in \Omega$. La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$ converge vers un $x^* \in \Omega$ tel que $\nabla f(x^*) = 0$.

## B - Résolution de systèmes linéaires

**Thm 22** : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est donnée par le minimum de $x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$, lequel peut être trouvé par descente de gradient. [BMP] 24-32

**Thm 23** (méthode de JACOBI) : Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, $M$ la diagonale de $A$, $N = M - A$ et $b \in \mathbb{C}^n$. La suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}^n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = M^{-1}N u_n + M^{-1} b$ converge (géométriquement) vers la solution de $Ax = b$.

## RÉFÉRENCES


[Go] Les maths en tête - Analyse (Xavier Gourdon) [3e édition]

[Gò] Les maths en tête - Algèbre (Xavier Gourdon) [3e édition]

[Rb] Éléments d'analyse réelle (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition]

[Be] Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J. & L. Bernis)

[BMP]

FIGURE 1

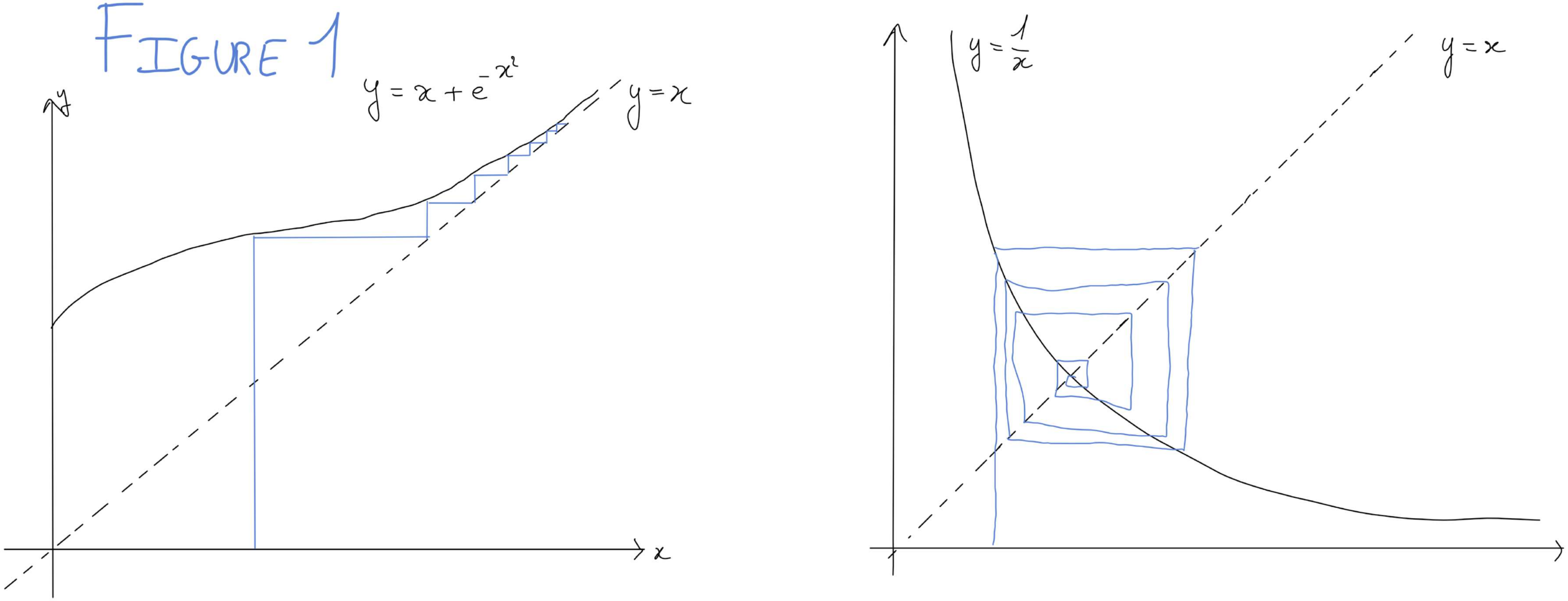


FIGURE 2

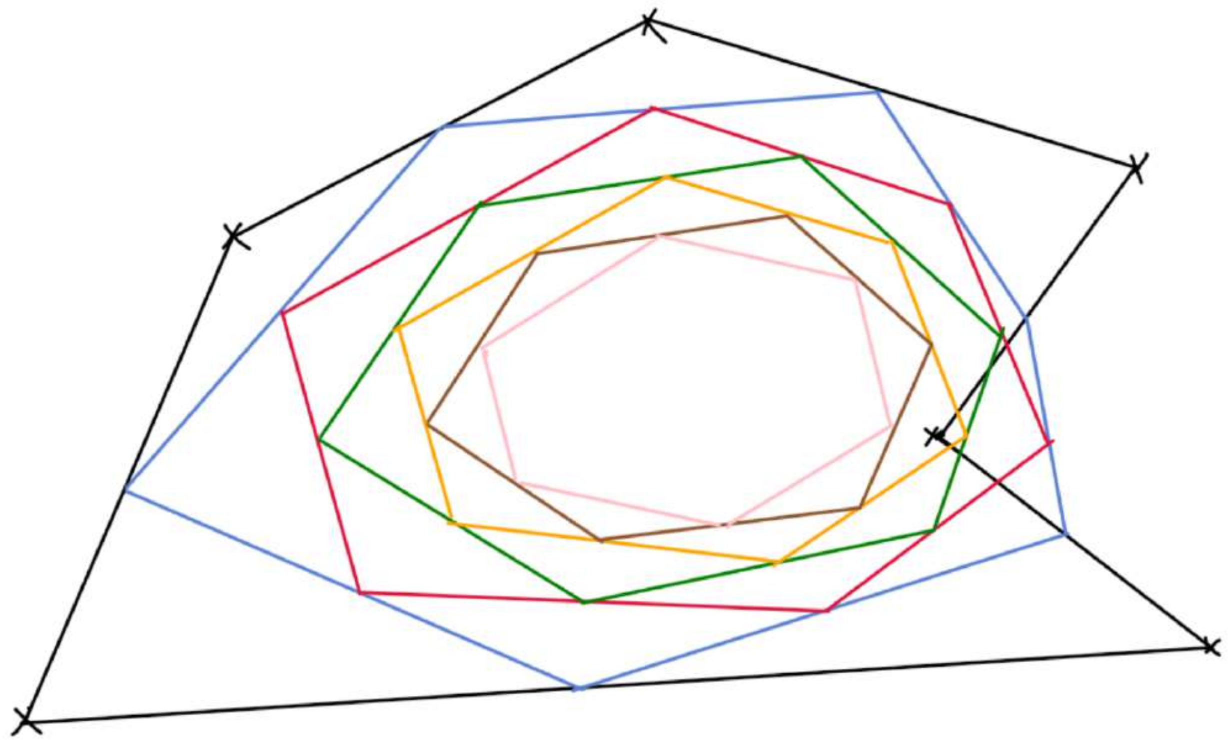

FIGURE 3