224

Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

I - Développements asymptotiques de suites et séries

A - Autour des séries numériques

[Go] ~210 **Thm 1** : Soient $(u_n)_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$ (resp $u_n = o(v_n)$, resp. $u_n = O(v_n)$).

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$ (resp $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$, resp $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$)
- Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_n$ (resp $\sum_{k=0}^{n} u_n = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right)$, resp $\sum_{k=0}^{n} u_n = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right)$)

[Go] 212 **Thm 2** (comparaison série intégrale) : Soient $p \in \mathbb{N}$, $\varphi : [p, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et décroissante. Alors $\sum_{n \geq p} \varphi(n)$ et $\int_p^{+\infty} \varphi$ ont même nature, et $\sum_{n \geq p} \varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi$ converge.

DEV 1

[FGN] ~145 **Ex 3** :
- $\forall \alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
- $\forall \alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

[FGN] 145 **Prop 4** : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et $k_n = \min\{k \geq 1 \mid H_k \geq n\}$.
- Il existe $\gamma > 0$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $\forall n \geq 1$, k_n est bien défini, et $\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$.

B - Suites définies par récurrence

Dans ce paragraphe, on fixe $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide, $f : A \longrightarrow A$ et $a \in A$. On cherche à étudier la suite $\{u_0 = a ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

[Be] 145 **Ex 5** : Soit $b > 0$, supposons que $A = [0, b]$, et que :
- f est continue et croissante
- $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, b]$, $f(x) < x$
- Il existe $\lambda > 0$ et $r > 1$ tels que $f(x) = x - \lambda x^r + \underset{x \to 0}{o}(x^r)$

DEV 2

Alors $u_n \sim (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

Appli 6 : Pour $f : x \longmapsto \ln(1+x)$, on a $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$ [Be] 148

Appli 7 : Pour $b = \frac{\pi}{2}$ et $f = \sin$, on a $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} + \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$ [Go] 228

C - Suites définies implicitement

Ex 8 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$. Alors $a_n = 1 - \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$. [FGN] 116 - 119

Ex 9 : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. On a le développement asymptotique $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Ex 10 : Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n est l'unique point d'annulation de $x \longmapsto x\sin(x) - c\cos(x)$ $(c > 0)$. Alors $x_n = n\pi + \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2(c+3)}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

II - Développements limités et asymptotiques de fonctions

A - Développement limité d'une fonction au voisinage d'un point

Soient I un intervalle, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

[Rb] 307 **Def 11** : On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a (abrv : $DL_n(a)$) s'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(x-a) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$, i.e. il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x-a) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

[Rb] 307 **Thm 12** : Si f admet un $DL_n(a)$, alors celui-ci est unique.

[Rb] 308 **Ex 13** :
- Une fonction polynomiale admet un $DL_n(a)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.
- $1 - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$ donc $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \frac{x}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

[Rb] 309 **Thm 14** (de Taylor-Young) : Si $a \in \mathring{I}$ et si $f \in C^n(I, \mathbb{K})$, alors
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

[Rb] 310 **Ex 15** : $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + o(x^n)$.

Prop 16 : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(x-a)^{n+1} P(x-a) = \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$

[Rb] 310-311 **Cor 17** : Si $f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, alors :
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $(fg)(x) = R(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où R est la troncature de PQ telle que $(PQ)(x) = R(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- Si $g(0) = 0$, alors $(f \circ g)(x) = R(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où R est la troncature de $P \circ Q$ telle que $(P\circ Q)(x) = R(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

[Rb] 311-313 **Ex 18** :
- $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$, $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
- $\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + \underset{x\to 0}{o}(x^7)$
- Soit $f : x \longmapsto x + \ln(1+x)$. Alors $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

Prop 19 : Supposons que $f \in C^1(I, \mathbb{K})$. Si $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$, alors [Rb] 314
$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$

Ex 20 : $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$ [Rb] 315
$\tan' = 1 + \tan^2 = \cos^{-2}$ donc $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)$ ~313

Rq 21 : On ne peut pas simplement dériver un développement limité : considérer [Rb] 315
$f : x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (f admet un $DL_2(0)$, mais f' n'admet pas de $DL_1(0)$ car non dérivable)
Cependant, si f admet un $DL_n(a)$ et f' admet un $DL_{n-1}(a)$, alors on peut.

B - Cas des fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Thm 22 : Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $f, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues par [Go] 163
morceaux telles que $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ (resp. $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$, resp. $f(x) = \underset{x\to b}{O}(g(x))$).
- Si $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$ (resp. $\int_a^x f = \underset{x\to b}{o}(\int_a^x g)$, resp. $\int_a^x f = \underset{x\to b}{O}(\int_a^x g)$)
- Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$ (resp. $\int_x^b f = \underset{x\to b}{o}(\int_x^b g)$, resp. $\int_x^b f = \underset{x\to b}{O}(\int_x^b g)$)

Ex 23 :
- $\forall \alpha > 0$, $\frac{1}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$ donc $\ln(x) = o\left(\int_1^x \frac{dt}{t^{1-\alpha}}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$. [Go] 164 173 ?
- $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k!\, x}{\ln(x)^{k+1}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{\ln(x)^{n+1}}\right)$
- $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$

Thm 24 (méthode de Laplace) : Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$, $\varphi : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe [Rv] 349
C^2 telle que $\varphi'(a) = 0$, $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$ et $\varphi''(a) > 0$. Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle

que $f(a)\neq 0$, f est continue en a et il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $\int_a^b |f(x)|\, e^{-t_0\varphi(x)} < +\infty$. Alors $\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\, \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$.

[Rv] 349 __Appli 25__ : Formule de STIRLING : $\Gamma(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\, t^t e^{-t}$

C- Cas des fonctions définies à l'aide d'une série

[Go] 302 __Ex 26__ : Pour $s>1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

On a $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \underset{s\to 1}{o}(1)$

RÉFÉRENCES

[FGN] Oraux X-ENS, Analyse 1

[Go] Gourdon

[Be] Bernis

[Rb] Éléments d'analyse réelle

[Rv] Rouvière

ANNEXE : Développements limités usuels en 0.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + o(x^n)$$