223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

I - Comportement asymptotique des suites numériques

A- Convergence et limites

[EA] 12-13 **Def 1** : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- converge vers $l \in \mathbb{K}$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, et l est appelée limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- diverge sinon.

[EA] ?33 **Ex 2** :
- $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
- Une suite arithmétique de raison r, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$, s'explicite $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$. Si $r \neq 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Une suite géométrique de raison q, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$, s'explicite $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$. Si $|q| < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

[EA] 12 **Thm 3** : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.

[EA] 13 **Prop 4** : Toute suite convergente est bornée.

[EA] 13 **Cex 5** : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée divergente.

[EA] 16 **Prop 6** : Si $u_n \to u$, $v_n \to v$ et $w_n \to w$, alors $u_n + v_n w_n \to u + vw$.

[Rb] 165 **Prop 7** : Soient $a \in \mathbb{K}$ et $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Alors f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

[EA] 34 **Def 8** : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ \forall p \geq N,\ |u_n - u_m| \leq \varepsilon$$

[EA] ~35 +39 **Thm 9** : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si elle est de Cauchy.

[EA] 53 **Thm 10** (de Cesàro) : Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ (Cex : $(-1)^n$)

B- Valeurs d'adhérence

Def 11 : Une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. [EA] 14

Def 12 : Une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. [EA] 15

Prop 13 : Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors pour toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Rq 14 : Une suite convergente admet sa limite comme unique valeur d'adhérence. Réciproquement, la suite $(n(1+(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence, mais ne converge pas. [EA] 15

Prop 15 : Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N : |u_n - a| \leq \varepsilon \Leftarrow \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = a\}$ est infini. [Go] ~19

Cex 16 : La dernière implication est stricte : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Ex 17 : Soit $\mu > 0$. La suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mu u_n (1 - u_n)$. Si $\mu \leq 3$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si $3 < \mu < 3{,}55$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a 2^k, $k \geq 1$ valeurs d'adhérence. Si $\mu > 3{,}56\ldots$ c'est compliqué.

C- Cas des suites réelles

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Def 18 : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,$ [EA] 20 $u_n \geq A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Prop 19 : Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$, alors $u \leq v$. [EA] 19

Thm 20 (des gendarmes) : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. [EA] 19

[EA] 32 **Thm 21** (de la limite monotone) : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (resp. non majorée), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in\mathbb{R}$ (resp. vers $l=+\infty$). Plus précisément, $l=\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Appli 22 :
- Si $u_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sin(u_n)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n$ converge

[EA] 33 **Def 23** : On dit que $((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est un *couple de suites adjacentes* si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

[EA] 33 **Thm 24** (des suites adjacentes) : Si $((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est un couple de suites adjacentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un $l\in\mathbb{R}$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq l\leq v_n$.

[EA] 33 **Ex 25** : $u_n=1-\frac{1}{n}$, $v_n=1+\frac{1}{n^2}$, $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

[EA] 36 [Rb] 94 **Thm 26** (de Bolzano-Weierstrass) : Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

[Rb] 95 **Cor 27** : Une suite réelle converge si et seulement si elle est bornée et elle a une unique valeur d'adhérence.

[Rb] 94 + [EA] 36 **Rq 28** : Thm 26 peut être montré en construisant un couple de suites extraites adjacentes et utilise Thm 24, ou avec Thm 21 en montrant que de toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.

[Rb] 120 **Def 29** :
- La *limite supérieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\limsup_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n} u_k$.
- La *limite inférieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\liminf_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geq n} u_k$.

[Rb] 120-121 **Prop 30** : $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$, et pour toute valeur d'adhérence l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\liminf_{n\to+\infty} u_n\leq l\leq\limsup_{n\to+\infty}u_n$.

[Rb] 122 **Thm 31** : $\lim_{n\to+\infty}u_n=l\in\overline{\mathbb{R}} \iff \liminf_{n\to+\infty}u_n=\limsup_{n\to+\infty}u_n=l$

Appli 32 :
- $\lim_{n\to+\infty}|||T^n|||^{\frac{1}{n}}=\inf_{n\in\mathbb{N}}|||T^n|||^{\frac{1}{n}}$
- $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X \iff \forall t\in\mathbb{R}$, F_X continue en $t\Rightarrow F_{X_n}(t)\longrightarrow F_X(t)$.

II - Suites particulières

A - Séries numériques

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $S_n=\sum_{k=0}^n u_k$.

Ex 33 : Si $u_n=q^n$ avec $|q|<1$, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{1-q}$.

Prop 34 : Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq0$, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée. [Go] 209

Cex 35 : La positivité est capitale : $u_n=(-1)^n$.

Prop 36 : Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $u_n\longrightarrow0$. [Go] 209

Cex 37 : Ce n'est qu'une implication : $u_n=\frac{1}{n}$

Thm 38 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n\sim v_n$, i.e. $\frac{u_n}{v_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. [Go] 210
- Si $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(\sum_{k=0}^n v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\sim\sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k$.
- Si $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(\sum_{k=0}^n v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, et $\sum_{k=0}^n u_k\sim\sum_{k=0}^n v_k$.

Ex 39 : Il existe $\gamma>0$ telle que $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ [Go] 211

B - Suites définies par récurrence

Soient $A\subseteq\mathbb{R}$ non vide, $f:A\longrightarrow A$, $a\in A$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Prop 40 : Si f est continue, et si $\lim_{n\to+\infty}u_n=l\in A$, alors $f(l)=l$. [Go] 200

Ex 41 : [Go] 228
- Pour $A=[0,\frac{\pi}{2}]$ et $f=\sin$, $u_n\longrightarrow0$.
- Pour $f:x\longmapsto ax+b$, $a\neq1$, $b\neq0$, on obtient une suite arithmético-géométrique. Posons $c=\frac{b}{1-a}=f(c)$. On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=c+(u_0-c)a^n$. Si $|a|<1$, alors $u_n\to c$. [Go] 201

Ex 42 : Soit $b>0$, supposons que $A=[0,b]$ et que : **DEV 1** [Be] 145
- f est continue et croissante

- $f(0)=0$ et $\forall x\in]0,b]$, $f(x)<x$
- Il existe $\lambda>0$ et $r>1$ tels que $f(x)=x-\lambda x^r+\underset{x\to 0}{o}(x^r)$

Alors $u_n \sim (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

[Be] 148 Appli 43 : Pour $f: x\longmapsto \ln(1+x)$, on a $u_n=\frac{2}{n}+\frac{2\ln(n)}{3n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

III - Approximation de réels

[Rb] 99 Prop 44 : Soit $x\in\mathbb{R}$, pour $n\in\mathbb{N}$ posons $x_n=10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ et $y_n=x_n+10^{-n}$. Alors $((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est un couple de suites décimales adjacentes qui tend vers x.

Prop 45 (méthode de Héron) : Soit $a\geq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{a}$.

[Rb] 345-346 Thm 46 (méthode de Newton) : Soit $f\in C^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)f(b)<0$ et $\forall x\in[a,b]$, $f'(x)f''(x)\neq 0$. L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]a,b[$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0\in[a,b[$ tel que $f(x_0)f''(x_0)>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$ est monotone, converge vers α, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_n-\alpha|\leq(b-a)^{2^n}\left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n-1}$ où $M=\|f''\|_\infty$ et $m=\min_{[a,b]}|f'|$.

[Rb] 114 Thm 47 : Si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$, alors $\alpha:=\inf G\cap\mathbb{R}^{+*}$ est bien défini, et :
- Si $\alpha>0$, alors $G=\alpha\mathbb{Z}$
- Si $\alpha=0$, alors G est dense.

[Rb] 115 Ex 48 : Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$. Tout réel est limite d'une suite de nombres de la forme $na+mb$ avec $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$.

[Rb] 132 Ex 49 :
- L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$.
- L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Def 50 : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si : [FGN] 47

$$\forall(a,b)\in[0,1[^2,\ a<b \Rightarrow \frac{1}{N}\#\{n\in[\![1,N]\!]\mid a\leq\{u_n\}<b\}\xrightarrow[N\to+\infty]{} b-a$$

où $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ désigne la partie fractionnaire de $x\in\mathbb{R}$.

Thm 51 (critère de Weyl) : Les assertions suivantes sont équivalentes : [FGN] 47
1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1
2. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et 1-périodique, alors $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(u_n)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1 f$
3. Pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2i\pi k u_n}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$

DEV 2

Ex 52 :
- Soit $\gamma>0$. La suite $(n\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1 si, et seulement si $\gamma\notin\mathbb{Q}$.
- $(\{\log(n)\})_{n\geq 1}$ n'est pas équirépartie

Prop 53 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1, alors $\{\{u_n\}: n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$, autrement dit l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\{u_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est $[0,1]$.

Références

[EA] El Amrani, *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions.*

[Rb] Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle.*

[Go] Gourdon, *Analyse*

[Be] Bernis

[FGN] Oraux X-ENS, *Analyse 2.*

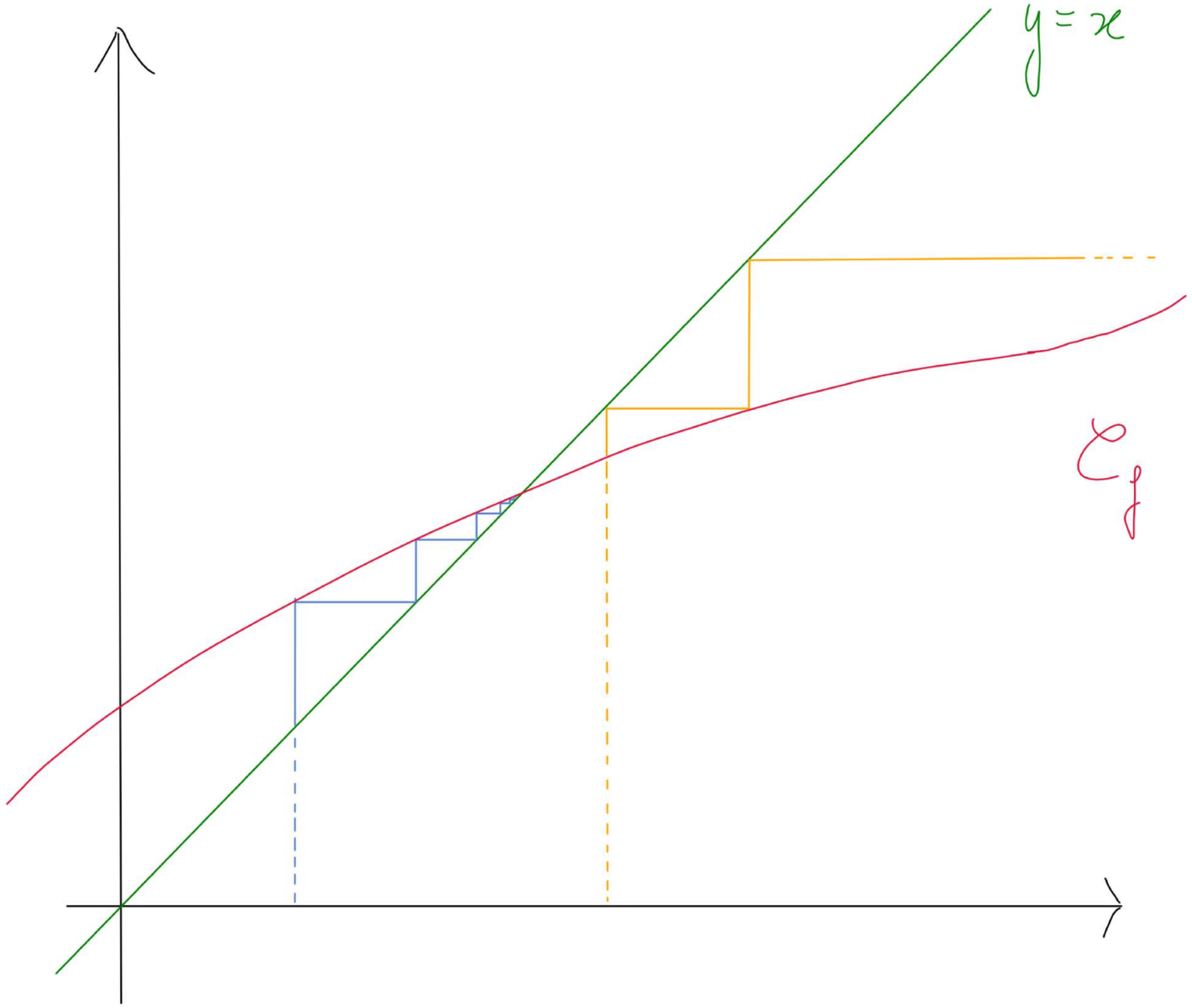

FIGURE 1 : Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

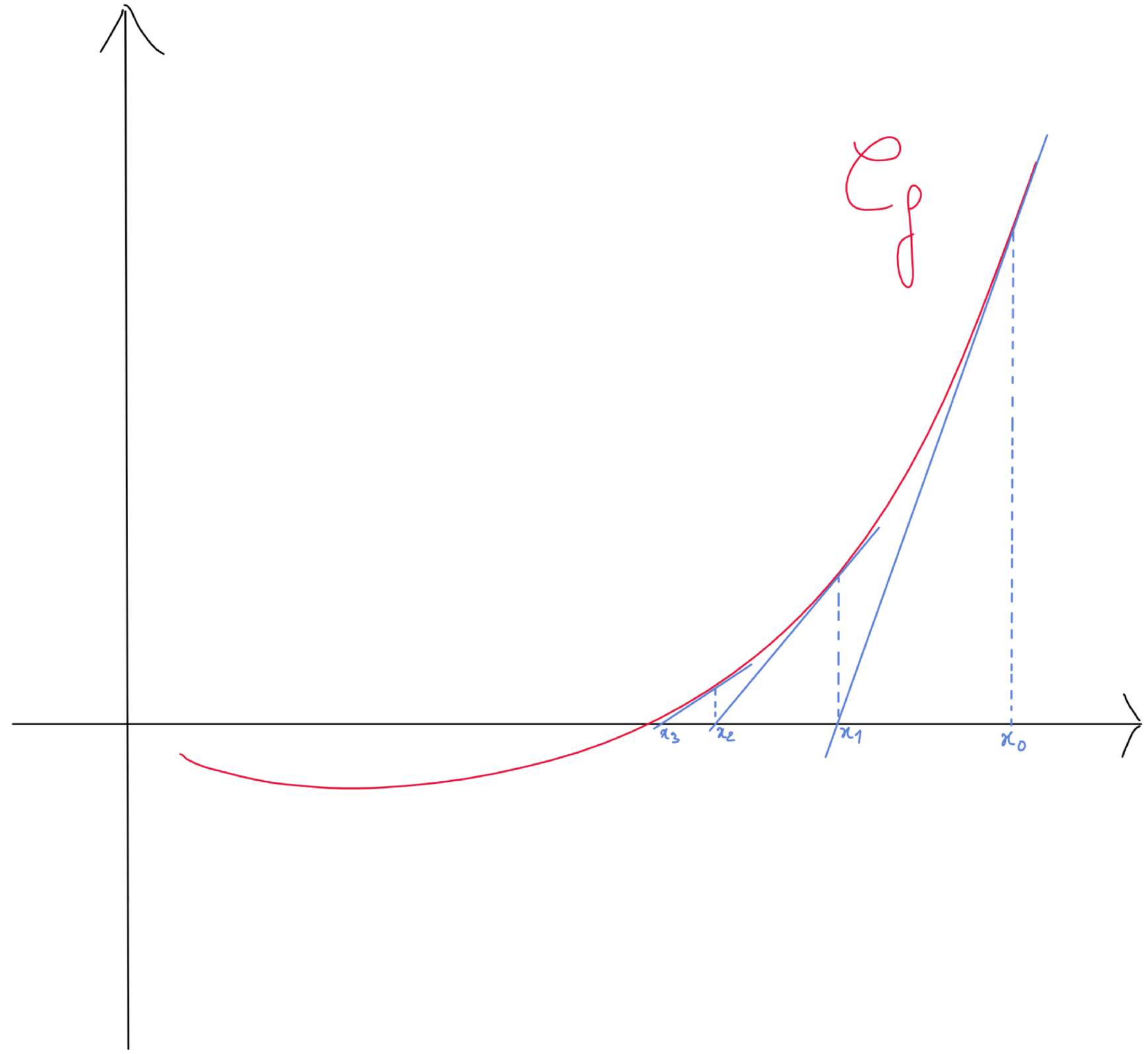

FIGURE 2 : Méthode de NEWTON