Dans cette leçon, $n \geq 1$, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. L'abréviation "EDO" signifie "équation différentielle ordinaire".

I – Introduction à la résolution des EDO linéaires

A – Notations et définitions

[Go] 377 **Def 1** : Soient $A_0, \dots, A_p : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(A_p \neq 0)$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continues. L'équation (E) : $\forall t \in I$, $\sum_{k=0}^{p} A_k(t) Y^{(k)}(t) = B(t)$, d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$, est appelée EDO linéaire d'ordre 1, ou système d'EDO linéaires si on veut souligner le fait que $n > 1$ quand c'est effectivement le cas.
Lorsque $B = 0$, on dit que (E) est *homogène*, et avec second membre sinon.
Lorsque $A_p = I_n$, on dit que (E) est *réduite*.

Notations 2 : Dans la suite, A et B seront fixées et supposées continues. On cherche à résoudre (E) : $Y' = AY + B$. On note (H) : $Y' = AY$ l'EDO homogène associée à (E). On note $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de (E) sur I.

Notations 3 : On note D l'opérateur de dérivation. Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note $P(D)(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k y^{(k)}$. On note enfin e_a la fonction $t \longmapsto \exp(ta)$, avec a un élément d'une $\mathbb{R}$-algèbre telle que exp est définie.

[Go] 377 **Réduction du cadre théorique** : Chercher les solutions de l'EDO linéaire réduite d'ordre p : $y^{(p)} + P(D)(y) = b$, $P = \sum_{k=0}^{p-1} A_k X^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})[X]$, est équivalent à résoudre l'EDO linéaire (réduite) d'ordre 1 :

$$Y' = C_p Y + B, \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} y^{(p-1)} \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}, \quad C_p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ I_n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & -A_{p-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On concentrera donc notre étude sur les EDO linéaire réduites d'ordre 1.

B – Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire – structure algébrique de l'ensemble des solutions

Prop 4 : $S_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{K}^n)$, et $S_I(E)$ en est un sous-espace affine. [Go] 378

Def 5 : Un problème de Cauchy (linéaire) est la recherche d'une solution Y d'une EDO (linéaire) satisfaisant une condition initiale, i.e. vérifiant $Y(t_0) = Y_0$ avec $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ fixé. [Go] 374

Thm 6 (de Cauchy-Lipschitz linéaire) : Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continues, et $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy $\{ Y' = AY + B \,;\, Y(t_0) = Y_0$ admet une unique solution. DEV 1 [Go] 378

Cor 7 : Soit $t_0 \in I$. L'application $\varphi_{t_0} : S_I(H) \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $Y \longmapsto Y(t_0)$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). [Go] 378

Cor 8 : $\dim(S_I(H)) = n$. D'après le principe de réduction au cas des EDO d'ordre 1, l'ensemble des solutions d'une EDO scalaire linéaire réduite homogène d'ordre p est de dimension p.

Def 9 : Une base de $S_I(H)$ est appelé *système fondamental* de (H).

C – Notion de wronskien

Soit $\mathcal{B}$ une base de F.

Def 10 : Soit $(h_1, \dots, h_n) \in S_I(H)^n$. Le wronskien de $(h_1, \dots, h_n)$ dans $\mathcal{B}$ est $W : t \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(h_1(t), \dots, h_n(t))$. [Go] 378

Thm 11 : Soit $(h_1, \dots, h_n) \in S_I(H)^n$. Sont équivalentes : 1▸ $(h_1, \dots, h_n)$ est un système fondamental de (H) 2▸ $\forall t \in I$, $W(t) \neq 0$ 3▸ $\exists t_0 \in I$: $W(t_0) \neq 0$. [Go] 379

[Go] 378 **Rq 12** : Pour (H) : $y^{(n)} + a_{p-1} y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y = 0$, si $(h_1, \dots, h_n)$ est une famille de solutions de (H), alors :

$$W(t) = \begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) & \cdots & h_n(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) & \cdots & h_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_1^{(n-1)}(t) & h_2^{(n-1)}(t) & \cdots & h_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

[Go] 388 **Lemme 13** : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$, $\sum_{k=1}^{n} \det_B(x_1, \dots, Ax_k, \dots, x_n) = tr(A) \det_B(x_1, \dots, x_n)$

[Go] 388 **Prop 14** : Soit $(h_1, \dots, h_n) \in S_I(H)^n$. Le wronskien W de $(h_1, \dots, h_n)$ dans B vérifie l'équation différentielle $W' = tr(A) W$.

II – Résolution explicite

Soient $a : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continues. On cherche maintenant à résoudre explicitement (E) : $y' = ay + b$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$.

A – Résolution du problème homogène

[Go] ~379 **Prop 15** : Si a est constante, alors : $S_I(H) = e_a \mathbb{K}^n$

[Go] ~379 **Ex 16** : $S_{\mathbb{R}}\left(y'(t) = \frac{1}{1+t^2} y(t)\right) = \mathbb{R} \exp \circ \arctan$

[Go] 380 **Prop 17** : Soit $P = \prod_{i=1}^{k} (X - r_i)^{m_i} \in \mathbb{K}[X]$.

$$S_I(P(D)(y) = 0) = \{ t \longmapsto e^{r_i t} P_i(t) \ : \ i \in [\![1,k]\!], P_i \in \mathbb{K}_{m_i - 1}[X] \}$$

[Be^t] 63 **Ex 18** : EDO linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
Soit $P = X^2 + bX + c = (X - r_1)(X - r_2) \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta = b^2 - 4c$,
et (H) : $P(D)(y) = y'' + by' + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors $S_{\mathbb{R}}(H) = \mathbb{R} e_{r_1} + \mathbb{R} e_{r_2}$
- Si $\Delta = 0$, alors $S_{\mathbb{R}}(H) = (\mathbb{R} + \mathbb{R}\, id_{\mathbb{R}})\, e_{r_1}$
- Si $\Delta < 0$, alors $r_1 = \overline{r_2} = \alpha + i\omega$, et $S_{\mathbb{R}}(H) = (\mathbb{R} \cos_\omega + \mathbb{R} \sin_\omega) e_\alpha$.

B – Techniques de recherche d'une solution particulière

[Go] 379 **Méthode 19** (de variation de la constante) : Soit A une primitive de a. Il existe une fonction dérivable λ sur I telle que $t \longmapsto e^{A(t)} \lambda(t)$ est solution de (E). Plus précisément, on peut prendre λ une primitive de $e_{-A} b$.

Ex 20 : $S_{\mathbb{R}}\left(y' + \frac{2t}{1+t^2} y = \frac{1+3t^2}{1+t^2}\right) = \left\{ t \longmapsto t + \frac{\lambda}{1+t^2} \ : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

[Be^t] 55 **Cor 21** (formule de DUHAMEL) : Si a est constante, alors la solution du problème de Cauchy $\{ y' = ay + b \ ; \ y(t_0) = y_0$ est :

$$y : t \longmapsto e^{(t-t_0)a} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)a} b(s) ds$$

Ex 22 : La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$ est $y : t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 + e^{t} - e^{-t} \\ 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Rq 23 : Les techniques ci-dessus requièrent de savoir calculer l'exponentielle d'une matrice, ce qui peut se faire à l'aide de réductions, mais qui devient vite pénible. La technique suivante s'affranchit de cette contrainte.

[Be^t] ~54 **Méthode 24** (de variation des constantes) : Soit $(h_1, \dots, h_n)$ un système fondamental de (H), notons W son wronskien. Il existe (d'uniques) $\beta_1, \dots, \beta_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues telles que $b = \sum_{k=1}^{n} \beta_k h_k$. Concrètement, $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\beta_k = \frac{1}{W} \det_B(h_1, \dots, h_{k-1}, b, h_{k+1}, \dots, h_n).$$

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des primitives de $\beta_1, \dots, \beta_n$, alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \in S_I(E)$.

Ex 25 : Soient $\omega > 0$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f'' + \omega^2 f \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) \geq 0$.

[Be] 149 Méthode 26 (développement en séries entières) : Si $a_0, \dots, a_{p-1}, b : I \to \mathbb{K}$ sont développables en série entière au voisinage de $t_0 \in I$, alors l'équation $(E) : y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k y^{(k)} + b$ admet une solution développable en série entière au voisinage de t_0, dont on peut trouver les coefficients par unicité du développement en série entière.

DEV 2

[Da] 538 Ex 27 : Résolution de $(E) : xy'' + 2y' - \omega^2 xy = 0$ $(\omega \in \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_\pm^*$

III - Étude qualitative en dimension/ordre 2

A - EDO linéaires réelles d'ordre 2

[Rb] 396 395 Prop 28 : Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues, considérons $(H) : y'' + py' + qy = 0$.

1. Si (φ, ψ) est un système fondamental de (H), alors φ et ψ ne s'annulent pas en même temps.
2. Les zéros d'une solution non nulle de (H) sont isolés.

[Go] 395 Prop 29 : Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue non nulle. Considérons

1. Toute solution de $(H) : y'' + qy$ sur $\mathbb{R}$ s'annule au moins une fois.
2. Toute solution non nulle de $(H) : y'' - qy$ sur $\mathbb{R}$ s'annule au plus une fois.

[Go] 395 Prop 30 : Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue intégrable. L'équation $y'' + qy = 0$ admet au moins une solution non bornée sur $\mathbb{R}^+$.

[Go] 397 Lemme 31 (de Gronwall) : Soient $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\varphi, \psi, y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continues telles que $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s)\, ds$. Alors :

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(u) du} ds$$

[Go] 398 Prop 32 : Soit $q \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ croissante. Les solutions de $(H) : y'' + qy = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

B - EDO linéaires homogènes dans le plan, portraits de phase

Def 33 : Un *portrait de phase* est une représentation géométrique de la trajectoire d'un système dynamique dans l'espace (dit "de phases") où il prend ses valeurs. [Gr] 433

Rq 34 : Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, chaque point de l'espace de phase appartient à une unique trajectoire : en particulier, les différentes trajectoires ne s'intersectent pas. [Gr] 434

Ex 35 : Classification des portraits de phase de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ [Gr] 436-441

→ FIGURE 1

Ex 36 : Pendule simple [FIGURE 2] : le mouvement d'un pendule est régi par l'équation $\theta'' = -\mu\theta' - \frac{g}{L}\sin(\theta)$, où L représente la longueur du pendule, $g > 0$ l'accélération de pesanteur, $\mu \geq 0$ la résistance de l'air, et θ l'angle orienté du pendule par rapport à la verticale. [Be] 401-410

Lorsque θ est proche de 0, on peut faire l'approximation $\sin(\theta) \simeq \theta$, qui rend l'équation linéaire.

Lorsque θ est proche de π, on peut faire l'approximation $\sin(\theta) \approx -\theta$, qui rend l'équation linéaire.

Les points $(0 + 2k\pi, 0)$ et $(\pi + 2k\pi, 0)$ sont respectivement un foyer stable et un noeud instable.

Références

[Go]

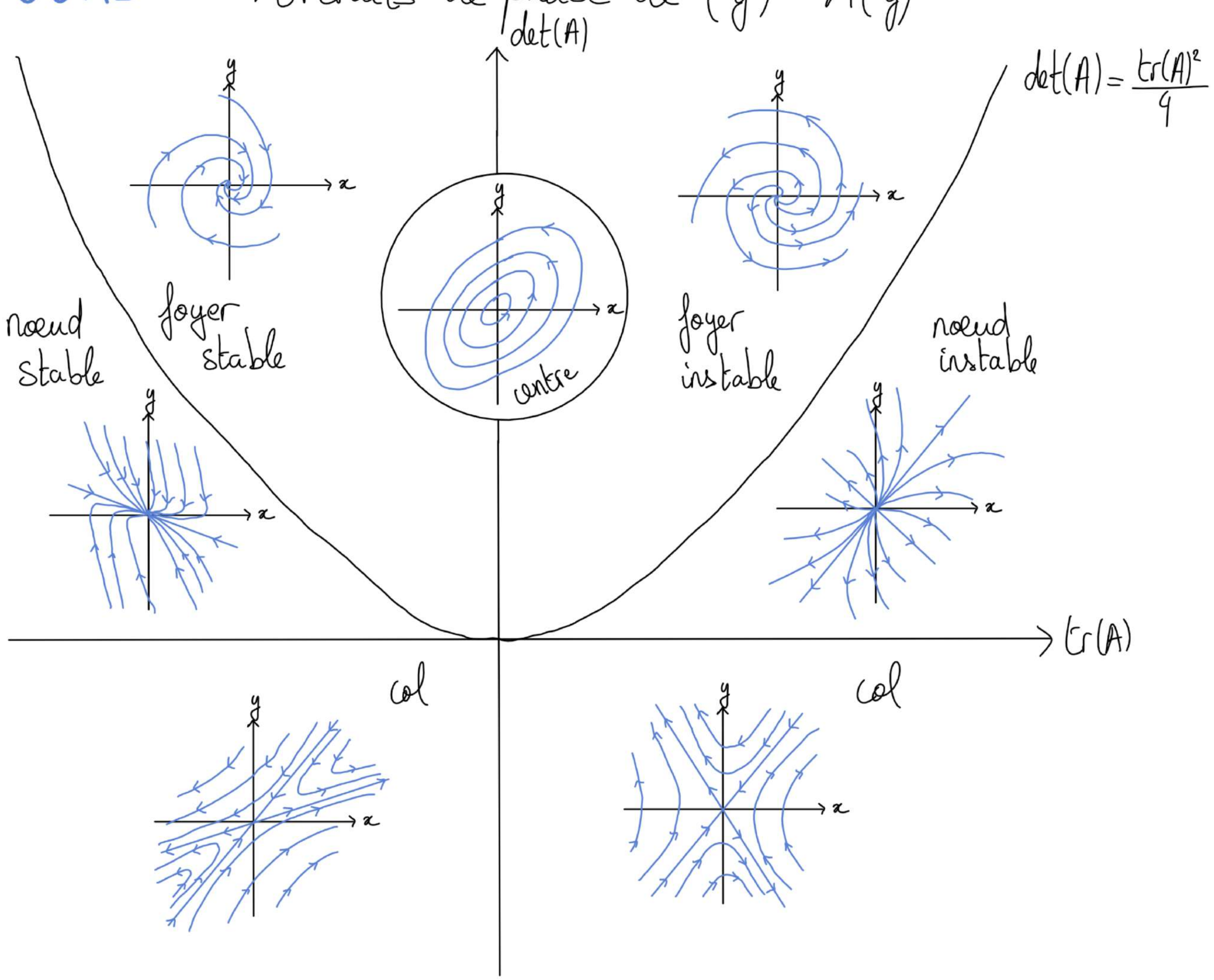
[Rb]

[Be]

[Gr]

[Da]

FIGURE 1 : Portraits de phase de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Cas où $\det(A) = \dfrac{\mathrm{tr}(A)^2}{4}$:

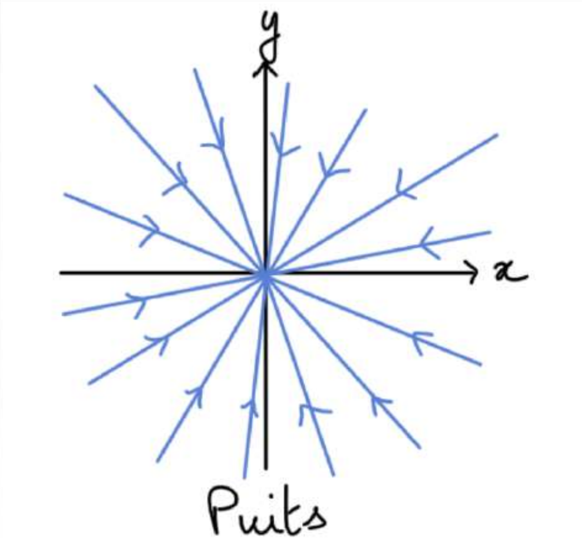
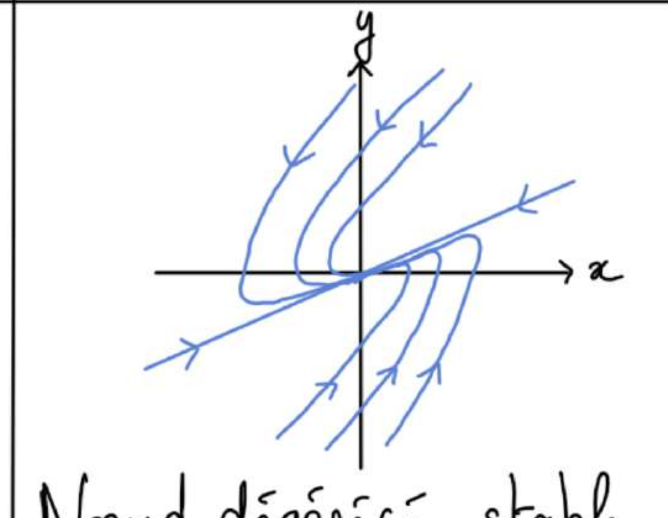
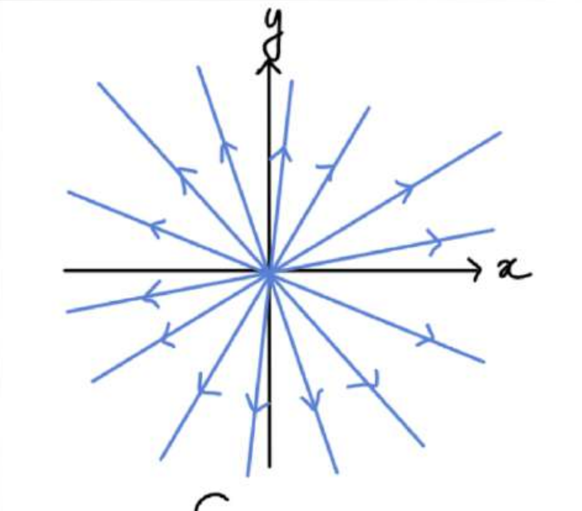
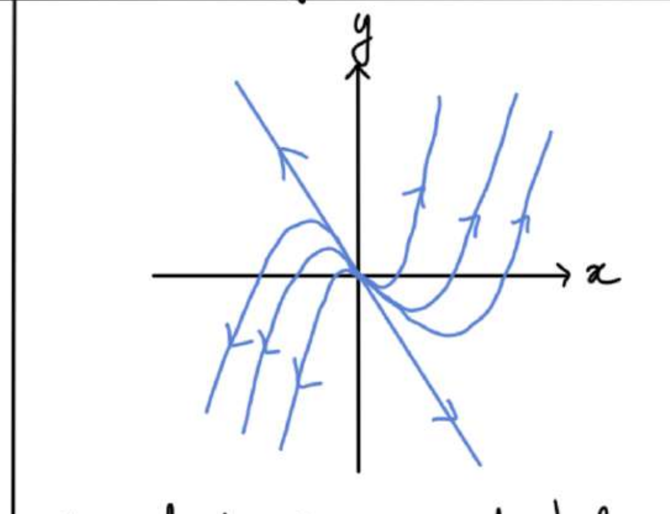
	$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
$\lambda < 0$	 Puits	 Noeud dégénéré stable
$\lambda > 0$	 Source	 Noeud dégénéré instable

FIGURE 2 : Pendule simple