220

Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études en dimension 1 ou 2.

I - Solutions d'une EDO : existence, unicité, survie

A - Définitions et cadre de la leçon

[Go] 373 Def 1 : Une *équation différentielle ordinaire* (EDO) est une équation d'inconnue une fonction y liant celle-ci à ses dérivées, i.e. de la forme $\forall t \in I$, $g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $y : I \to \mathbb{R}^d$ et $g : I \times \underset{\text{ouvert}}{\Omega_{n(\mathbb{R}^d)^{n+1}}} \longrightarrow \mathbb{R}^d$. On dit que cette équation est *réduite* si elle peut être écrite de manière équivalente sous la forme $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$. L'entier n est alors appelé *ordre* de cette EDO.

[Bet] 20 Prop 2 : Soit $(E) : y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ une EDO où $y : I \to \mathbb{R}^d$. Posons $Y = {}^t(y \; y' \cdots y^{(n-1)}) : I \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^n$ et $F : I \times (\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^n$, $(t, Y) \longmapsto {}^t(y', \dots, y^{(n-1)}, f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}))$. Alors $(E) \Leftrightarrow (E') : \forall t \in I, Y'(t) = F(t, Y)$

Dans toute la suite, on considère un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert, et $(E) : y'(t) = f(t, y(t))$ que l'on notera abusivement $(E) : y' = f(t, y)$.

[Bet] 11 Def 3 : Une *solution* de (E) est la donnée d'un intervalle $J \subseteq I$ et d'une fonction $y \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ satisfaisant (E) pour $t \in J$.

[Bet] 14-16 Def 4 : Soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions de (E).

- On dit que (J_2, y_2) *prolongement* de (J_1, y_1) si $J_1 \subseteq J_2$ et si $y_{2|J_1} = y_1$.
- On dit que (J_1, y_1) est *maximale* si elle n'admet pas de prolongement (strict).
- On dit que (J_1, y_1) est *globale* si $J_1 = I$ (en particulier elle est maximale).

[Bet] 16 Rq 5 : Pour $(E) : y' = y^2$ sur $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^{-*}, t \mapsto -\frac{1}{t})$ est maximale non globale.

[Bet] 12 Def 6 : Soit $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Un *problème de Cauchy* est la recherche d'une solution satisfaisant une condition initiale. On notera $(C) : \{(E) : y' = f(t,y) \; ; \; y(t_0) = y_0$ un tel problème de Cauchy.

Dans la suite, on fixe $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ et $(C) : \{(E) : y' = f(t,y) \; ; \; y(t_0) = y_0$.

B - Le théorème de Cauchy - Lipschitz et ses conséquences

Def 7 : On dit que f est *localement lipschitzienne selon sa deuxième variable* si : $\forall (t_0, y_0) \in I \times \Omega$, $\forall V \in \mathcal{V}((t_0, y_0))$, $\exists \lambda > 0 : \forall t \in I$, $\forall (y_1, y_2) \in \Omega^2$, $((t, y_1), (t, y_2)) \in V^2 \Rightarrow \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \lambda \|y_1 - y_2\|$. [Bet] 84

Thm 8 (de Cauchy - Lipschitz) : Si f est continue sur $I \times \Omega$ et localement lipschitzienne selon sa deuxième variable, alors (C) admet une unique solution maximale. [Bet] 85

Si f est globalement lipschitzienne selon sa deuxième variable, alors cette solution est globale.

Cex 9 : $f : (t, y) \longmapsto 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement lipschitzienne, et $y' = 2\sqrt{|y|}$ admet plusieurs solutions telles que $y(0) = 0$ (ex : 0, $t \mapsto t \cdot |t|$).

Appli 10 (schéma d'Euler explicite) : Soit $\Delta t > 0$ petit. On pose $Y_0 = y(t_0) = y_0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = Y_n + \Delta t \, f(t_0 + n\Delta t, Y_n)$. La fonction affine par morceaux Y telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y(t_0 + n\Delta t) = Y_n$ approche la solution de (C) lorsque f est C^1 et globalement lipschitzienne selon Y. [Bet] 318-319

C - Durée de vie et explosion des solutions

Lemme 11 (de Grönwall différentiel) : Soient $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in C^0(I, \mathbb{R})$ telles que $w' \leq w \cdot v$ sur I. Alors : [Bet] 18

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \Rightarrow w(t) \leq w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t v\right)$$

Lemme 12 (de Grönwall intégral) : Soient $u \in C^0(I, \mathbb{R})$, $v \in C^0(I, \mathbb{R}^+)$ et $a \in \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a + \int_{t_0}^t uv$. Alors : [Bet] 18

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t v\right)$$

Thm 13 (des bouts) : Sous les hypothèses de Thm 8 : Une solution de (E) est maximale si, et seulement si aux voisinage des bords de I, son graphe [Bet] 110 n'est contenue dans aucun compact.

Cor 14: Une solution bornée (dans l'espace) est globale. FIGURE 1

Cor 15: Si f est lipschitzienne, alors (E) admet une unique solution globale.

Ex 16: C'est le cas pour une équation linéaire (paragraphe II.A).

II – Méthodes et exemples de résolution

A – Cas linéaire

Soient $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continues. Dans ce paragraphe, $(E) : y'(t) = f(t,y) = A(t)y(t) + b(t)$.

[Be^t] 34-35 Prop 17: L'ensemble $S_I(E)$ des solutions de (E) est un sous-espace affine de $C^1(I,\mathbb{R}^d)$ de dimension d, de direction $S_I(H)$.

Ex 18: $S_{\mathbb{R}}(\underset{(\omega>0)}{y'' + \omega^2 y} = \cos) = \frac{\cos}{1-\omega^2} + \mathbb{R}\sin_\omega + \mathbb{R}\cos_\omega$

Soient $p : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et $(E) : y'' + py' + qy = 0$

[Be^t] 144 Méthode 19 ([Go] 380): Si y_0 est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur I, alors
$$y \in S_I(E) \iff z' := (y/y_0)' \in S_I(x' = A \times (2 + y_0'/y_0)x)$$

[Be^t] 149 Méthode 20: Si p et q sont développables en série entière, alors (E) admet une solution développable en série entière.

[Da] 538 Ex 21: Résolution de $ty'' + 2y' - \underset{(\omega>0)}{\omega^2} ty = 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{*+}$. DEV 1

B – Cas non linéaire

Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.

[Go] 381 [Be^t] 138 Prop 22 (équations de Bernoulli): Soit $m \geq 2$. En faisant le changement de variable $z = y^{1-m}$, on ramène l'équation $(E) : y' = ay + by^m$ à l'équation équivalente $(E') : z' = (1-m)a + (1-m)b$.

[Go] 387 Prop 23 (équation de Ricatti): Si y_0 est une solution de $(E) : y' = ay^2 + by + c$, alors on ramène (E) à une équation de Bernoulli par le changement de variables $z = y - y_0$. [Be^t] 139

Ex 24: ?

C – Équations à variables séparées [Be^t] 130

Dans ce paragraphe, on considère un intervalle J, $h \in C^0(I,\mathbb{R})$, $g \in C^0(J,\mathbb{R})$, $(t_0, y_0) \in I \times J$, et $(C) : \begin{cases} (E) : y' = h(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. On dit que (E) est à variables séparées.

Thm 25: Supposons que g ne s'annule jamais. Posons $H : t \in I \mapsto \int_{t_0}^t h$ et $G : y \in J \mapsto \int_{y_0}^y \frac{1}{g}$. Si K est un intervalle tel que $H(K) \subseteq G(J)$, alors (C) admet une unique solution. Celle-ci vérifie $\forall t \in K,\ G(y(t)) = H(t)$.

Rq 26: En pratique, on écrit abusivement $\frac{dy}{ds} = g(y)h(s) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(s)ds$
$$\Rightarrow \int_{t_0}^t h(s)ds = \int_{t_0}^t \frac{dy}{g(y)} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(s)}ds$$

Ex 27: $(E) : y' = -\frac{1}{t}y^2 \longrightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{ds}{s} = \int_1^t \frac{ds}{s} = \int_1^t -\frac{dy}{y^2} = \int_{y(1)}^{y(t)} -\frac{1}{s^2}ds$

$\longrightarrow \ln(t) = \frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(1)} \longrightarrow y(t) = (\ln(t) + y(-1)^{-1})^{-1}$

III – Étude qualitative des solutions

[Gr] 433 Def 28: Un *système autonome* est une EDO dont la variation ne dépend pas du temps, i.e. de la forme $y' = f(y)$ où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs.

Dans toute la suite, $(E) : y' = f(y)$ est un système autonome de $\mathbb{R}^2$. On décompose f selon la base canonique $f = (f_1, f_2)$, et on suppose f continue et localement lipschitzienne.

A - Points d'équilibre, isoclines, intégrales premières

[Be^t] 187 ? ? **Def 28** : ▸ Un point d'équilibre de (E) est un point y_* tel que $f(y_*)=0$.

▸ On dit que y_* est stable si, $(\mathbb{R}^{+*}, y)$ étant solution de (E),

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \|y(0)-y_*\| \leq \delta \Rightarrow \forall t \geq 0,\ \|y(t)-y_*\| \leq \varepsilon$$

On dit que y_* est instable sinon.

▸ On dit que y_* est asymptotiquement stable si, $(\mathbb{R}^{+*}, y)$ étant solution de (E),

$$\exists \delta>0 : \|y(0)-y_*\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|y(t)-y_*\|=0$$

[Be^t] 401 -410 **Ex 29** (pendule) : Soient $\gamma \geq 0$ et $\omega>0$. On considère $(E) : \theta''=-\gamma\theta'-\omega^2\sin(\theta)$ qui se réécrit $(E') : \binom{\theta}{\theta'}' = {}^t(\theta' \quad -\gamma\theta'-\omega^2\sin(\theta))$. FIGURE 2

▸ Les $(\pi+2k\pi, 0)$ $(k\in\mathbb{Z})$ sont des points d'équilibre instables,

▸ Si $\gamma=0$, les $(2k\pi, 0)$ $(k\in\mathbb{Z})$ sont des points d'équilibre stables non asymptotiquement stables,

▸ Si $\gamma>0$, les $(2k\pi,0)$ $(k\in\mathbb{Z})$ sont des points d'équilibre stables asymptotiquement stables.

[Be^t] 186 **Def 30** : ▸ L'isocline verticale (resp. horizontale) de f est l'ensemble :

$$I_\infty := \{x\in\Omega \mid f_1(x)=0\} \quad (\text{resp. } I_0 := \{x\in\Omega \mid f_2(x)=0\})$$

▸ L'isocline d'inclinaison $\alpha\in\mathbb{R}$ de f est l'ensemble $I_\alpha = \{x\in\Omega \mid f_2(x)=\alpha f_1(x)\}$.

[Be^t] 186 **Prop 31** : Soit $\alpha\in[0,+\infty]$. Si $x\in I_\alpha$, alors $f(x)$ dirige une droite de pente α. Cela servira plus bas à tracer des portraits de phase, car $y'(t)=f(y(t))$ est tangent à la courbe décrite par y en t.

[Be^t] 189 **Prop 32** : L'ensemble des points d'équilibre de (E) est $I_0 \cap I_\infty$.

[Be^t] 191 -193 **Def 33** : ▸ Les courbes intégrales de f sont les trajectoires des solutions maximales de (E).

▸ L'orbite de (E) issue de $y_0\in\Omega$ est la courbe intégrale de f passant par y_0 (qui est bien unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz).

▸ Une intégrale première de (E) est une fonction $H\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ telle que pour toute solution (J,y) de (E), on a $\forall t\in J,\ \frac{d}{dt}[H(y(t))]=0$.

Ex 34 : L'énergie mécanique est une intégrale première en dynamique du point. [Be^t] 403

Exemple : $\theta''+\omega^2\sin(\theta)=0 \rightarrow 2\theta''\theta' + 2\omega^2\theta'\sin(\theta)=0 \rightarrow H(\binom{\theta}{\theta'}) = (\theta')^2-2\omega^2\cos(\theta)$.

B - Portraits de phase d'un système autonome en dimension/degré 2

Def 35 : Un portrait de phase est une représentation géométrique de la trajectoire d'un système dynamique dans l'espace (dit "de phases") où il prend ses valeurs. [Be^t] 191

Rq 36 : Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, chaque point de l'espace de phase appartient à une unique trajectoire : en particulier, les différentes trajectoires ne s'intersectent pas. Cela correspond donc à la partition de Ω en orbites. [Gr] 434

Ex 37 : $(E) : \begin{cases} x'=y^2-x \\ y'=x^2+y^2-1 \end{cases}$ FIGURE 3 : isoclines, portrait de phase [Be^t] 187 -188

Système proie-prédateur de Lotka et Volterra [Be^t] 204

Soit $(a,b,c,d)\in(\mathbb{R}^{+*})^4$. On considère $(E) : \begin{cases} x' = ax-bxy \\ y' = -cy+dxy \end{cases}$ DEV2

Prop 38 : $H : \binom{x}{y} \longmapsto dx+by-c\ln(x)-a\ln(y)$ est une intégrale première de (E) sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Prop 39 : Soient $t_0\in\mathbb{R}$, $x_0>0$ et $y_0>0$. Le problème de Cauchy $\{(E) ; x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$. Celle-ci est périodique.

FIGURE 4 : Portrait de phase de (E).

FIGURE 1 : Situations (im)possibles d'après le théorème des bouts

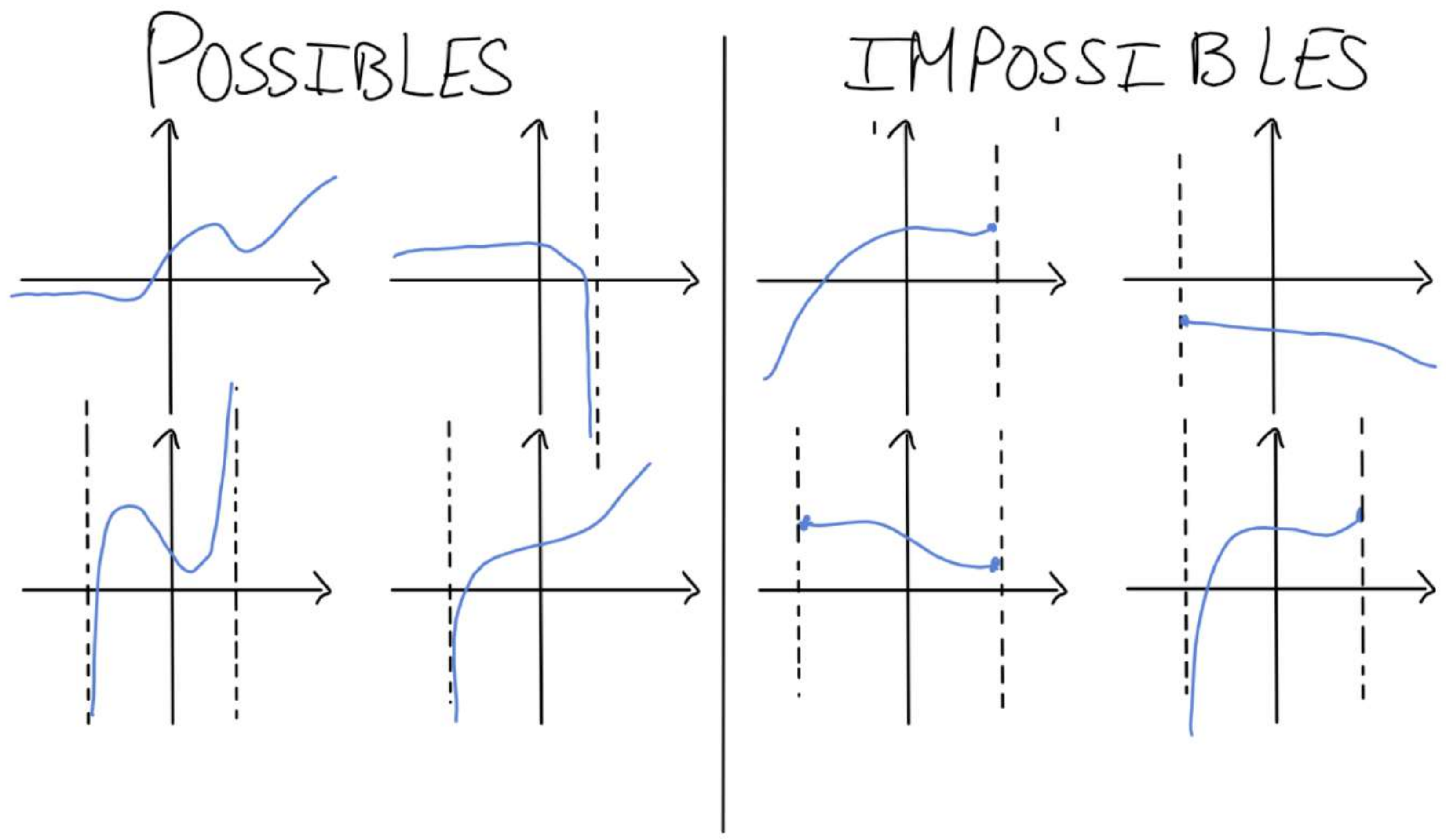


FIGURE 2 : Points d'équilibre du pendule simple

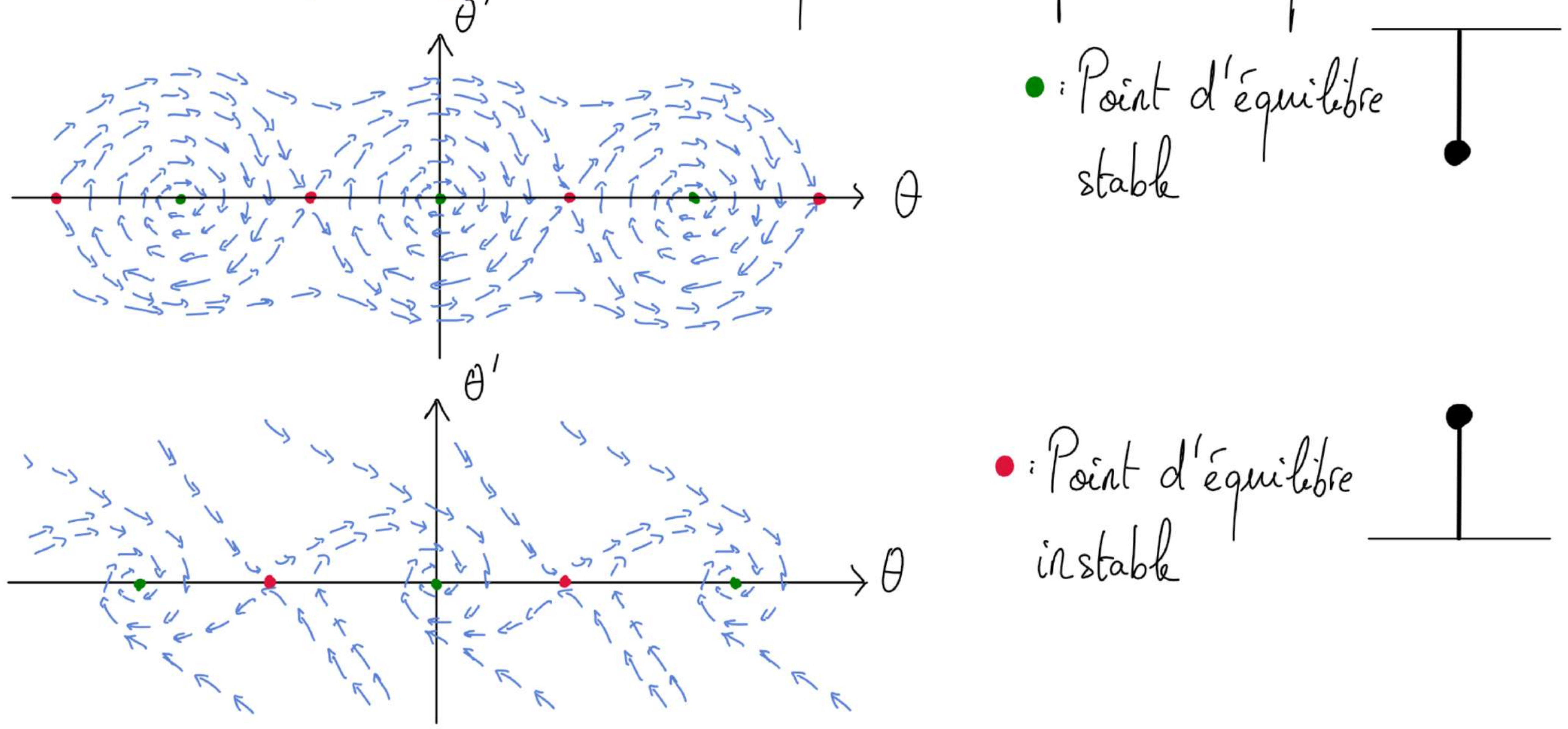


FIGURE 3 : (E) : $\begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$ (portrait de phase)

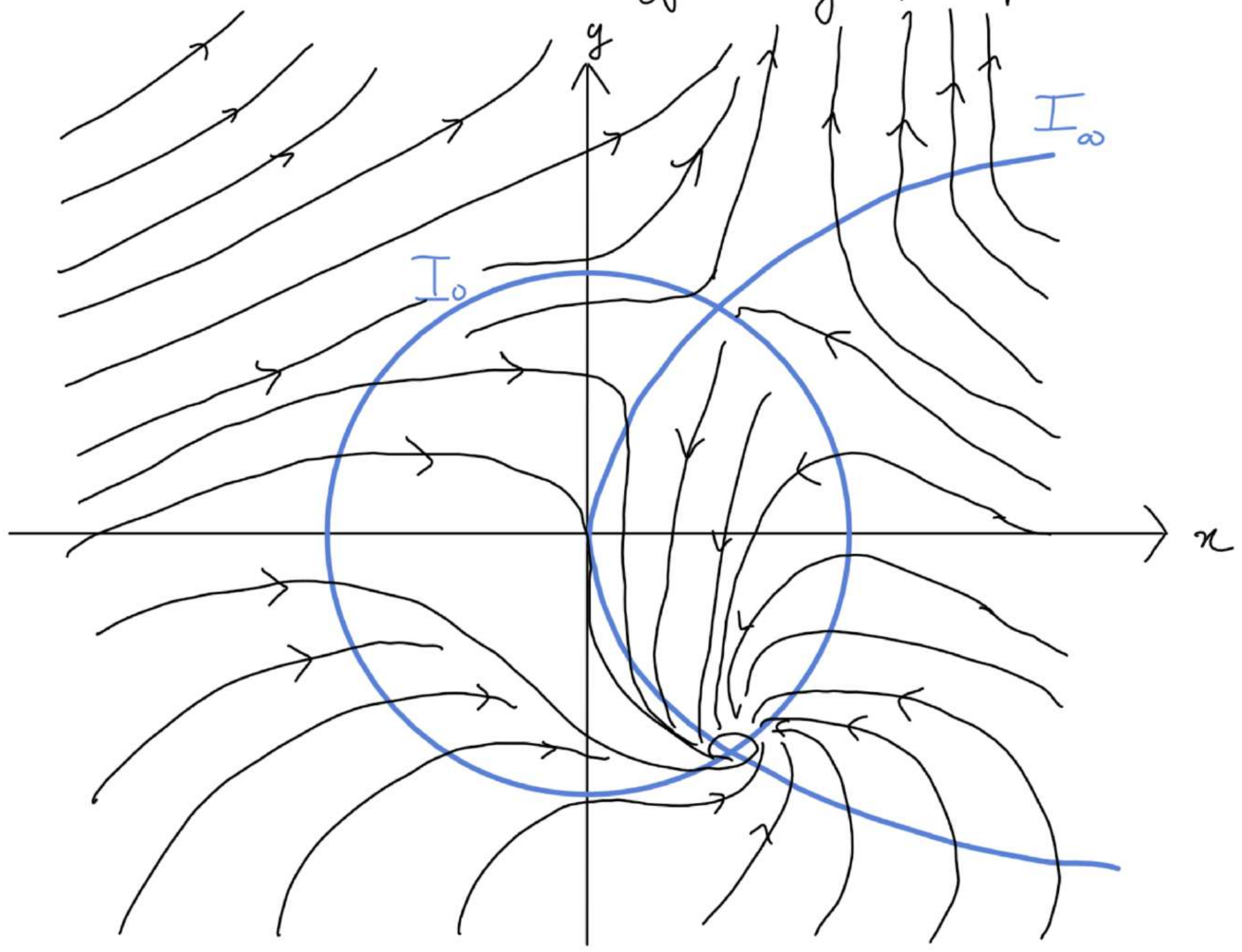
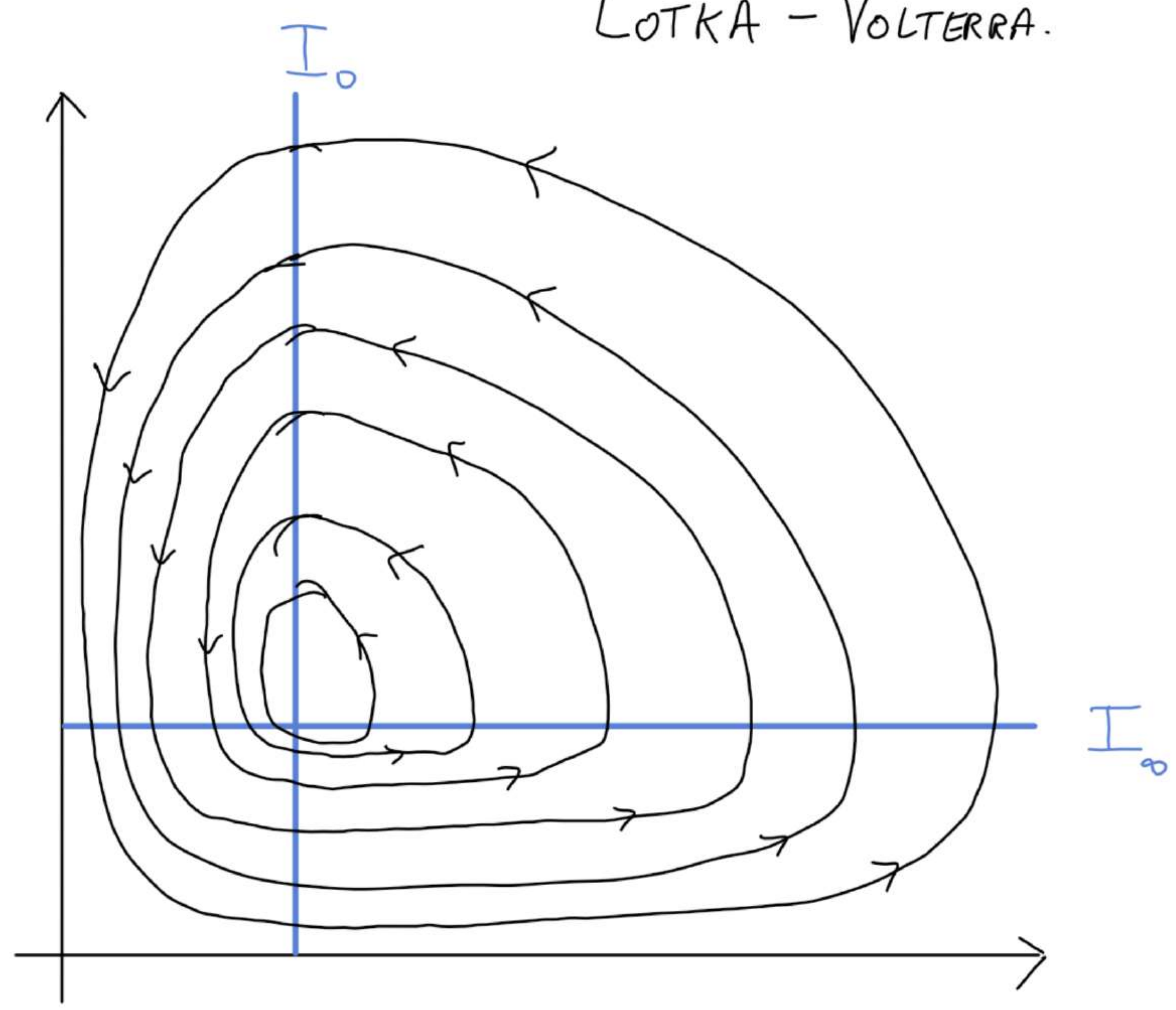


FIGURE 4 : Portrait de phase du système de LOTKA – VOLTERRA.



RÉFÉRENCES