Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

219

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $U \subseteq E$ non vide et $f : U \to \mathbb{R}$.

I - Existence et unicité d'extrema

<u>Def 1</u> : On dit que f admet un *maximum local* (resp. un *minimum local*) en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \cap U$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Si cette inégalité est vraie pour tout $x \in U$, alors $f(a)$ est un *maximum global* (resp. un *minimum global*) de f.

<u>Rq 2</u> : Un extremum global est local, mais la réciproque est fausse !

Considérer $x \longmapsto (x-2)x(x+2)$ sur $\mathbb{R}$.

A - Optimisation des fonctions continues sur un compact

[G] 31 <u>Thm 3</u> (des bornes atteintes) : Si U est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.

<u>Rq 4</u> : ▸ $\mathbb{R}$ n'est pas compact, arctan est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ mais n'atteint pas ses bornes.

▸ $f : x \neq 0 \mapsto 1/x$, $0 \mapsto 0$ n'est pas continue sur le compact $[-1,1]$, et n'est pas bornée.

[G] 233 <u>Cor 5</u> : Si $U = E \simeq \mathbb{R}^n$, f est continue sur U et $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet et atteint un minimum global.

[BMP] 30 <u>Cor 6</u> : Soit $F \subseteq E$ fermé non vide. Pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que

$$\|x-y\| = d(x,F) = \inf_{z \in F} \|x-z\|$$

B - Optimisation et convexité

Supposons U convexe, i.e. $\forall (x,y) \in U^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in U$.

[BMP] 26 <u>Def 7</u> : On dit que f est *convexe* si :

$$\forall (x,y) \in U^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est *strictement convexe* si cette inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $\lambda \notin \{0,1\}$.

<u>Ex 8</u> : Soient $E = U = \mathbb{R}^n$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $f : x \mapsto \langle Ax | x \rangle$. Alors f est (strictement) convexe *si, et seulement si* A est (définie) positive. [BMP] ~32

<u>Prop 9</u> : Si f est convexe et admet un minimum local, alors c'est un minimum global. Si f est de plus strictement convexe, alors ce minimum est unique. [BMP] 30

Soient $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $C \subseteq \mathcal{H}$ convexe fermé non vide, et F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

<u>Thm 10</u> (de projection sur un convexe fermé) : FIGURE 1 [HL] 91

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \exists!\, P_C(x) \in C : \quad \|x - P_C(x)\| = d(x,C) =: \inf_{y \in C} \|x-y\|$$

De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x) | x - y \rangle) \leq 0$

Dans le cas de F, le projeté $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$

<u>Thm 11</u> (de représentation de Riesz) : $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, $y \longmapsto \langle \cdot | y \rangle$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, i.e. une isométrie linéaire surjective. [HL] 96

C - Optimisation et holomorphie

On prend $E = \mathbb{C}$, U ouvert connexe, et f holomorphe sur U.

<u>Thm 12</u> : $\forall a \in U$, $\forall r > 0$, $\overline{B}(a,r) \subseteq U \Rightarrow f(a) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$ [BMP] 72

<u>Thm 13</u> (principe du maximum local) : Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante. [BMP] 72

<u>Thm 14</u> (principe du maximum global) : Supposons U borné et f continue sur $\overline{U}$. Alors $\sup\limits_{U} |f| = \max\limits_{\partial U} |f|$ et si ce maximum est atteint en un point de U, alors f est constante. [BMP] 72

<u>Thm 15</u> (de Liouville) : Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée, alors f est constante.

Thm 16 (D'ALEMBERT-GAUSS) : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

II - Optimisation des fonctions différentiables - caractérisation des extrema

Ici, $E = \mathbb{R}^n$ et U est ouvert.

A- Conditions de premier ordre

[BMP] 16 Def 17 : On dit que a est un point critique si $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$.

[BMP] ~18 Thm 18 : Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a, alors a est un point critique, et $\mathrm{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

Rq 19 : $x \mapsto x^3$ admet un point critique qui n'est pas un extremum.

[Rb] 251 Thm 20 (de ROLLE) : Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

[Rb] 258 Thm 21 (des accroissements finis) : Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

[Rb] 205 238 Cor 22 :
- Si f est dérivable sur un intervalle de dérivée positive, alors f est croissante.
- Si f est deux fois dérivable sur un intervalle de dérivée seconde positive, alors f est convexe.

B- Conditions de second ordre

[BMP] ~18 Thm 23 :
- Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a, alors a est un point critique, et $\mathrm{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).
- La réciproque est vraie si on suppose en plus $\mathrm{Hess}_a(f)$ définie.
- Si a est un point critique et si $\mathrm{Hess}_a(f)$ admet deux valeurs propres de signes strictement opposés, alors a est un point-selle.

FIGURE 2

[Rv] 371 Rq 24 : $x \mapsto x^4$ admet un minimum global en 0, mais sa hessienne (sa dérivée seconde) est nulle en 0.

Ex 25 : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle - \langle b|x\rangle$. [BMP] 24-32
Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x) = Ax - b$ et $\mathrm{Hess}_J(x) = A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, J admet un unique minimum (global) qui est la solution de $Ax = b$.

C- Optimisation sous contrainte

Thm 26 (des extrema liés) : Soit $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U,\mathbb{R})^{r+1}$, posons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de LAGRANGE, tels que $df(a) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k dg_k(a)$. [R] 372

DEV 2

Appli 27 : Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à 3 rebonds. [Rv] 413

Rq 28 : Ce théorème permet de ramener la recherche d'un extremum local en dimension n sous r contraintes à la résolution du système carré $n+r$:

$$\left\{ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial e_i}(a) \quad ; \quad g_1(a) = \dots = g_r(a) = 0. \right.$$

Ex 29 : Soient $a_1, \dots, a_n, a$ des réels deux à deux distincts, posons $\Sigma = \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n \mid \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} a_k p_k = a\}$ (qui est non vide). La fonction : [Rv] 411 412

$$H : (p_1, \dots, p_n) \in \Sigma \longmapsto -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k)$$

admet un unique maximum, en $\frac{1}{n}(1, \dots, 1)$.

III - Optimisation numérique : algorithmes de recherche d'extrema

Thm 30 (méthode de NEWTON) : Soient $a < b$ deux réels, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a,b]$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : [Rb] 345-346

$$x_0 \in [a,b] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

1. Pour x_0 assez proche de l'unique zéro α de f, $(x_n)_n$ converge vers α à vitesse quadratique.
2. Si $f'' > 0$ sur $[a,b]$, alors la convergence (quadratique) de $(x_n)_n$ ne dépend pas du

choix de x_0, et :

$$x_{n+1} - \alpha \sim \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} (x_n - \alpha)^2$$

Appli 31 : ▸ Recherche de points critiques
▸ Schéma d'EULER implicite.

[BMP] 22-23 Thm 32 (méthode du gradient) : Soit $a \in U$ où f atteint un minimum local, soit $x_0 \in U$ proche de a. La suite définie par $x_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \nabla f(x_n)$ converge (sous certaines hypothèses) vers a.

RÉFÉRENCES

[BMP] Objectif agrégation (2^e^ édition)

[Rb] Éléments d'analyse réelle, Rombaldi

[Rv] Rouvière (4^e^ édition)

[G] Gourdon Analyse (3^e^ édition)

[HL] Hirsch-Lacombe

FIGURE 1 : Projection sur un convexe fermé

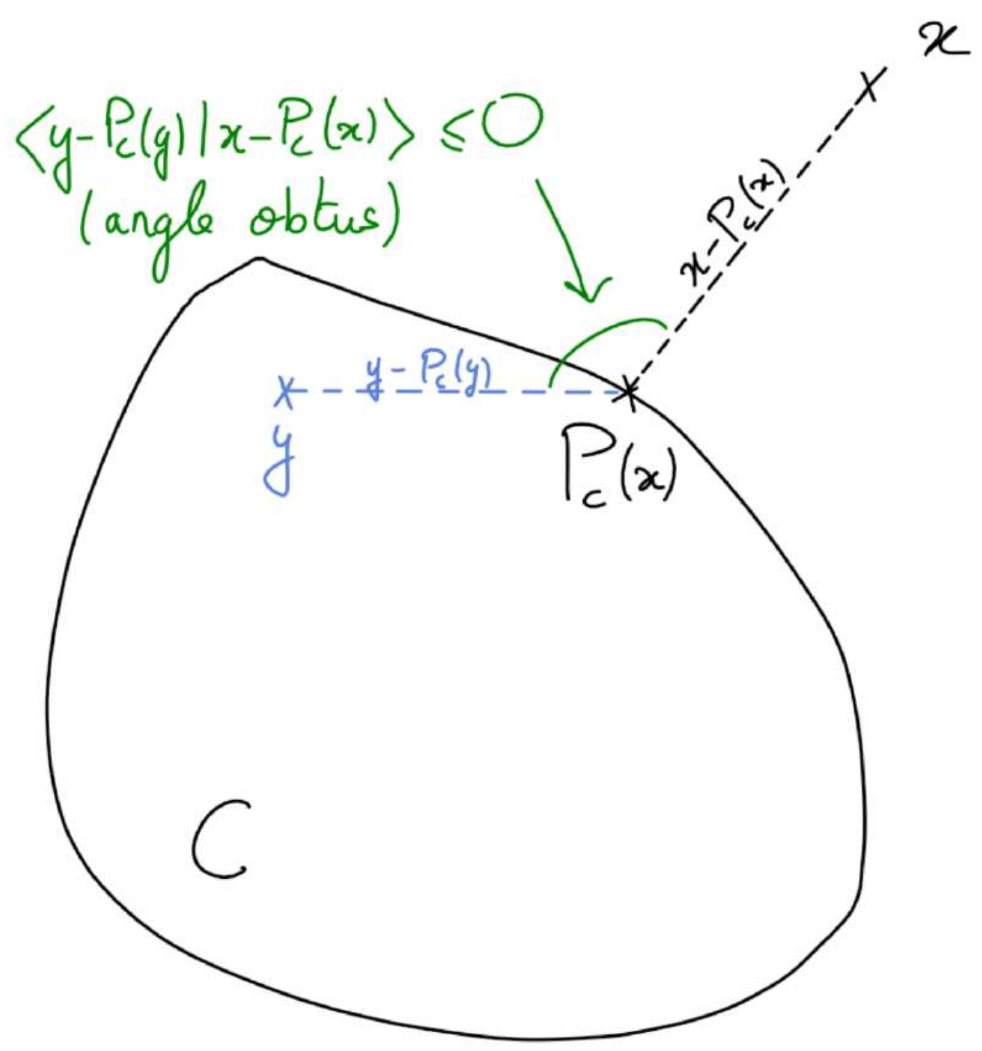

FIGURE 2 : Extrema, point-selle