

Leçon 24.1 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

I - Notions générales

X désigne un ensemble

Sauf mention contraire, toutes les familles sont définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) suites de fonctions

Def 1: Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions, et f une fonction.

a) $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X si
 $\forall x \in X, (f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ au sens de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$

b) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X si $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Rem 2: La CV uniforme entraîne la CV simple.

La réciproque est fautive:

Si $f_n: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+(x-n)^2}$ et $f: x \in [0, 1] \mapsto 0 \in \mathbb{R}$,
 alors il y a bien convergence simple sur $\mathbb{R}$,
 mais pas uniforme car $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{1+(x-n)^2} \right| = 1$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Nota 3: On écrit $\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{simple}} f \text{ pour dire } (f_n)_n \text{ CV simplement vers } f \text{ sur } X \\ f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \text{ pour dire } (f_n)_n \text{ CV uniformément vers } f \text{ sur } X. \end{array} \right\}$

Thm 4: [de Dirich]

Supposons $X = [a, b]$ où $a < b \in \mathbb{R}$

Soient $f_n (n \geq 0)$ et f des fonctions

a) $\left. \begin{array}{l} (f_n)_n \text{ est une suite croissante de fcts continues} \\ f_n \xrightarrow{\text{simple}} f \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$

b) $\left. \begin{array}{l} (f_n)_n \text{ est une suite de fcts croissantes continues} \\ f_n \xrightarrow{\text{simple}} f \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$

Prop 5: [critère de Cauchy uniforme]

Soient $f_n (n \geq 0)$ et f des fonctions. Alors:

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_{m+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Prop 6: On suppose que X est un espace métrique. Alors:

Une limite uniforme de fonctions continues en un point $x_0 \in X$ est continue en x_0 .

Rem 7: C'est faux s'il y a seulement CV simple.

Par exemple, si $f_n: x \in [0, 1] \mapsto x^n$ et $f: x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,
 alors f_n est continue en 1 point quelconque, $f_n \xrightarrow{\text{simple}} f$, mais f n'est pas continue en 1.

Prop 8: Supposons que $X = [a, b]$ où $a < b \in \mathbb{R}$

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fcts continues qui CV uniformément vers une fct f sur X .

Alors f est continue et $\int_a^b f(b) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(b) dt$

Prop 9: Supposons $X = [a, b]$ où $a < b \in \mathbb{R}$.

Soit $(f_n)_{n \geq 1} \subset C^1(X, \mathbb{C})$ telle que:

- il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge (i)
- la suite de fcts $(f'_n)_n$ CV uniformément vers une fct g (ii)

Alors $(f_n)_n$ CV uniformément vers une fct $f \in C^1(X, \mathbb{C})$ et $g = f'$

2) Séries de fonctions

Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fcts et S une fct. (resp. uniformément)

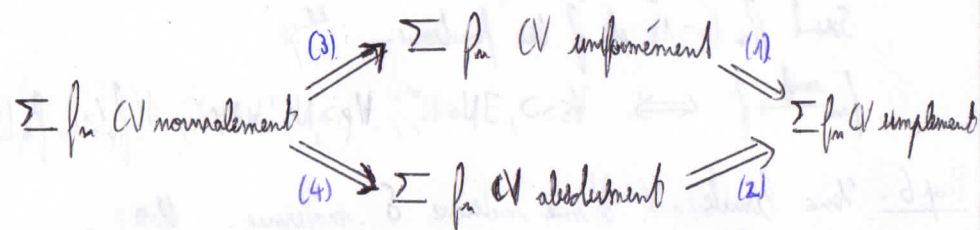
Def 10: a) On dit que la série de fcts $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur X

si $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n \geq 0}$ converge simplement (resp. uniformément) sur X .

b) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur X si la série de fcts $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ converge simplement sur X .

c) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X si $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in X} |f_n(x)| < +\infty$

Prop 11: on a le schéma d'implications suivant:



Ex-12: • Citer un exemple de la réciproque de (1):

$$f_n: \mathbb{D}, +\infty[\ni x \mapsto e^{-nx}$$

Mais $\sum f_n$ CV simplement vers $S: x \mapsto \frac{1}{1-e^{-x}}$
mais pas uniformément

• Citer un exemple de la réciproque de (2):

$$f_n: \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$$

Il y a CV simple par la suite des séries alternées,
mais il n'y a pas CV absolu car la série harmonique diverge.

• Citer un exemple de la réciproque de (3):

$$f_n: x \in [0, 1] \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

• Citer un exemple de la réciproque de (4):

$$f_n: x \in \mathbb{D}, +\infty[\mapsto e^{-nx}$$

Prop 13: Supposons que $\sum f_n$ CV simplement. Alors:

$$\sum f_n \text{ CV uniformément} \iff \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \int_a^b f_k \right| \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\text{unif.}} 0$$

Prop 14: a) Reprenons les hypothèses de la prop 13 en remplaçant f_n par $\sum_{n \geq 0} f_n$
et en supposant les f_n (n ∈ ℕ) continues

$$\text{Mais } \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(b) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(b) dt$$

b) Supposons $X = [a, b]$ où $a < b \in \mathbb{R}$.

Supposons que: $\left\{ \begin{array}{l} \text{les } f_n \text{ sont de classe } C^1 \\ \text{il existe } x_0 \in X \text{ tel que } \sum_{n \geq 0} f_n(x_0) \text{ CV} \\ \sum_{n \geq 0} f_n' \text{ CV uniformément.} \end{array} \right.$

Mais $\sum_{n \geq 0} f_n$ CV uniformément vers une fct C^1 , et $\left(\sum_{n \geq 0} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

II - Des séries de fonctions particulières

1) Séries entières

Def 15: Une série entière est une série de fct de la forme $z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$
où $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$.

Lem 16: [d'Abel]

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que

$\left\{ \begin{array}{l} \forall r < R, \sum a_n z^n \text{ CV normalement sur } \overline{D}(0, r) \\ \sum a_n z^n \text{ DV grossièrement en dehors de } \overline{D}(0, R) \end{array} \right.$

Ce nombre R vérifie précisément $R = \sup \{ r > 0 \mid (|a_n|/r^n)_n \text{ est bornée} \}$
et s'appelle le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

On le notera $RCV(\sum a_n z^n)$

Rem 17: La CV est absolue sur $D(0, R)$, mais n'est pas nécessairement uniforme sur $\overline{D}(0, R)$.

Ceci s'explique par le fait que la CV uniforme n'est pas une propriété locale.

Prop 18: a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \rho \in [0, +\infty]$, alors $RCV(\sum a_n z^n) = \rho$ (règle de d'Alembert)

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in [0, +\infty]$, alors $RCV(\sum a_n z^n) = \frac{1}{\rho}$ (règle d'Hadamard)

Prop 19: Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

Alors $\forall |z| \geq \min(RCV(\sum a_n z^n), RCV(\sum b_n z^n))$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n \quad (\text{série produit de Cauchy})$$

Def 20: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ où X est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$.

f est développable en série entière (DSE) si (développement en série entière)

$$\exists (a_n)_n \subset \mathbb{C}, \exists R > 0, \forall z \in D(0, R) \cap X, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Rem 21: Il n'y a pas de développement en série entière (lorsqu'il existe...)

App 22: [Nombres de Bell, DEV 1]

Soit $B_0 := 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$

$$a) B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

$$b) \text{ Notons la série } f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \text{ et } R \text{ son rayon de convergence}$$

$$\text{Alors } R > 0 \text{ et } \forall |z| \in]-R, R[, f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}.$$

$$c) \forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

2) Séries de Fourier

Nota 23: $C_{2\pi, pm}^k := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ est } C^k \text{ par morceaux et } 2\pi\text{-périodique}\}$

$$C_{2\pi}^k := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ est } C^k \text{ et } 2\pi\text{-périodique}\}.$$

Thm 24: $(x \mapsto e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert de $(L_{2\pi}^2(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$,

$$\text{où } \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g} dx$$

Cor 25: Soit $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$. Alors:

$$a) f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{ino} \quad \text{au sens de } (L_{2\pi}^2(\mathbb{R}), \langle, \rangle),$$

$$\text{où } c_n(f) := \langle f, e^{ino} \rangle$$

$$b) \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \quad \text{où } \|\cdot\| \text{ est la norme associée à } \langle, \rangle.$$

(Parseval)

Thm 26: [de Dirichlet]

Soit $f \in C_{pm, 2\pi}^1 \cap C^0(\mathbb{R})$. Alors $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{ino}$ au sens de la C/simple.

App 27: [Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier, DEV 2]

Soit $u_0 \in L^2([0, 2\pi])$.

Alors il existe un unique $u: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (i) \forall t > 0, u(t, \cdot) \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ (ii) \partial_t u \text{ et } \partial_{xx}^2 u \text{ sont bien définies et continues sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (iii) \text{ Sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \partial_t u = \partial_{xx}^2 u \\ (iv) \|u(t, \cdot) - u_0\| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \end{cases}$$

De plus (bonnes) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$