215

Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Dans la suite, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est ouvert, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), et $a \in U$. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$. On décompose f dans $\mathcal{B}'$: $\forall x \in U$, $f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) \varepsilon_k$.

I - Définitions et premières propriétés

A - Différentielle et dérivée directionnelle

[G] 323 Def 1 : On dit que f est *différentiable en a* s'il existe $u_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $\frac{1}{\|h\|} \| f(a+h) - f(a) - u_a(h) \| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Dans ce cas, u_a est unique : on l'appelle *différentielle* de f en a, et on la note $df(a)$. Si f est différentiable en tout point de U, alors on dit que f est *différentiable sur U*, et on dispose de $df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $a \longmapsto df(a)$.

[G] 323 Ex 2 : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est différentiable en a si, et seulement si f est dérivable en a ; le cas échéant, $df(a) : h \longmapsto h \cdot f'(a)$.

[G] 324 Def 3 : On dit que f admet une *dérivée directionnelle suivant* $h \in \mathbb{R}^n$ si $D_h f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(a+th) - f(a)]$ existe.

[G] 324 Prop 4 : Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée directionnelle en a suivant tout vecteur. Plus précisément : $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $D_h f(a) = df(a)(h)$.

[G] 324 Prop 5 : Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

[G] 327 Thm 6 (inégalité des accroissements finis) : Soit $(a,b) \in U^2$ tel que $[a,b] \subseteq U$. Si f est continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$, alors :

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \sup_{c \in]a,b[} \|df(c)\| \cdot \|b - a\|$$

Ex 7 : $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$ est en tout point différentiable, et $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^2$, $df(a) = 2\langle a | \cdot \rangle$.

B - Opérations sur les applications différentiables, exemples

Prop 8 : Si $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est bilinéaire, alors elle est différentiable en tout point, et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $dB(a,b)(h,k) = B(h,b) + B(a,k)$.

Ex 9 : $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xy$ est bilinéaire, et $d\varphi(a,b)(h,k) = hb + ak$.

Ex 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $u : (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \langle Ax | y \rangle$ est bilinéaire, et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $du(a,b)(h,k) = \langle Ah | b \rangle + \langle Aa | k \rangle$.

Prop 11 : Si f et $g : U \to \mathbb{R}^p$ sont différentiables en a, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est différentiable en a, et $d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a)$

Prop 12 : Soient $V \subseteq f(U)$ ouvert et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a, et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$. [G] 324

Ex 13 : Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en a, alors fg est différentiable en a, et $d(fg)(a) = d(\varphi \circ (f,g))(a) = f \cdot dg(a) + g \cdot df(a)$ (φ donnée en Ex 9) [G] 324

C - Dérivées partielles d'ordre 1, classe C^1

Def 14 : On dit que f admet en a une *j^e dérivée partielle dans* $\mathcal{B}$ si f admet une dérivée suivant e_j, que l'on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$ ou $\partial_j f(a)$. [G] 325

Rq 15 : Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles, mais la réciproque est fausse : considérer $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(0,0) \mapsto 0$. [G] 325

Notation : lorsque $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, on note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x)$, qui se calcule en considérant les x_i, $i \neq j$ comme constants, et en dérivant la fonction de x_j.

Def 16 : Si f admet en a des dérivées partielles suivant chaque e_j, alors on définit la (*matrice*) *jacobienne* de f en a : $\mathrm{Jac}_a(f) = (\partial_j f_i(a))_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq n}$. [G] 327

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $df(a)(h) = \mathrm{Jac}_a(f) \cdot (e_i^*(h))_{1 \leq i \leq n}$.

Prop 17 (règle de la chaîne) : Sous les hypothèses de Prop 12, $\mathrm{Jac}_a(g \circ f) = \mathrm{Jac}_{f(a)}(g) \times \mathrm{Jac}_a(f)$, i.e. $\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial e_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon_k}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial e_j}(a)$ [G] 327

Def 18 : On dit que f est *de classe* C^1 *sur* U si f est différentiable sur U et si df est continue sur U. [G] 323

Prop 19 : Les dérivées partielles (d'ordre 1) dans $\mathcal{B}$ existent et sont continues sur U *si, et seulement si* f est de classe C^1 sur U. [G] 325

II – Ordre supérieur – Étude locale

A – Différentielle et dérivées partielles d'ordre supérieur

[R] 283 **Def 20** : On dit que f est *deux fois différentiable en a* si f est différentiable sur U et si df est différentiable en a. On note alors $d^2f(a) := d(df)(a)$. On dit que f est *k fois différentiable en a* si f est $k-1$ fois différentiable sur U et si $d^{k-1}f$ est différentiable en a.

[R] 294 **Rq 21** : Si f est deux fois différentiable sur U, alors on dispose de $d^2f : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)) \simeq \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $a \mapsto d^2f(a)$. Ainsi, $d^2f(a)$ s'identifie à une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.

[R] 294 **Def 22** : Sous réserve d'existence, on appelle *dérivées partielles d'ordre 2 de f dans $\mathcal{B}$ en a* les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) := \frac{\partial}{\partial e_i}\left[\frac{\partial f}{\partial e_j}\right](a)$ $(1 \leq i,j \leq n)$. On appelle *dérivées partielles d'ordre k de f dans $\mathcal{B}$ en a* les vecteurs $\frac{\partial^k f}{\partial e_{i_1} \cdots \partial e_{i_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial e_{i_1}}\left[\frac{\partial^{k-1} f}{\partial e_{i_2} \cdots \partial e_{i_k}}\right](a)$ $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n)$

[R] 296 **Rq 23** : En général, $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(a)$: considérer la fonction de Rq 15.

Prop 24 : Prop 19 reste vraie en remplaçant 1 par k, pour tout $k \geq 1$.

[R] 294 **Thm 25** (de Schwarz) : Si f est deux fois différentiable en a, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(a)$$

DEV 1 : Différentielle de l'exponentielle matricielle.

B – Étude locale

[G] 341 **Thm 26** (d'inversion locale) : Si $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ et si $df(a)$ est inversible, alors il existe un voisinage $V \subseteq U$ de a tel que f induit une bijection de V dans $f(V)$ de réciproque C^1.

[R] 208 **Ex 27** : Définition locale d'un logarithme matriciel.

[R] 344 **Thm 28** (des fonctions implicites) : Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un ouvert, $(a,b) \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Si $f(a,b) = 0$ et si $f(a,\cdot)$ est différentiable en b, de différentielle inversible, alors il existe des voisinages U de a et V de b tels que $U \times V \subseteq \Omega$, et une unique application $\varphi \in C^1(U,V)$ telle que : $\{(x,y) \in U \times V \mid f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\}$.

Ex 29 : Détermination des équations d'état d'un système thermodynamique qui satisfait la loi des gaz parfaits : $f(P,V,T) = PV - nRT = 0$. [R] 348

Thm 30 (formule de Taylor) : Si f est k fois différentiable en a, alors $\forall h \in U$, [R] 296

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} d^j f(a)\underbrace{(h)\cdots(h)}_{j \text{ fois}} + o(\|h\|^k) = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial e_i}\right)^k [f](a) + o(\|h\|^k)$$

Thm 31 (formule de Taylor avec reste intégral) : Si $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h] \subseteq U$, [R] 298

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} d^j f(a)\underbrace{(h)\cdots(h)}_{j \text{ fois}} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)\underbrace{(h)\cdots(h)}_{k+1 \text{ fois}} dt$$

III – Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Dans toute cette partie, on suppose que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a.

A – Gradient, hessienne

Def 32 : On appelle *gradient de f en a* l'unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $df(a) = \langle \cdot \mid \nabla f(a) \rangle$. [G] 324

Prop 33 : $df(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)\, e_k^*$ et si $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)\, e_k$. [G] 325

À partir de maintenant, sauf mention contraire, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

Def 34 : On appelle *(matrice) hessienne de f en a* la matrice $\mathrm{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. [R] 294

Rq 35 : D'après le théorème de Schwarz, $\mathrm{Hess}_a(f)$ est symétrique. C'est la matrice de la forme bilinéaire $d^2f(a)$ dans $\mathcal{B}$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d^2f(a)(h)(k) = {}^t(e_i^*(h))_{1 \leq i \leq n} \cdot \mathrm{Hess}_a(f) \cdot (e_i^*(k))_{1 \leq i \leq n}$

Ex 36 : Expression du laplacien en coordonnées polaires $[\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))]$:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (f \circ \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (f \circ \varphi)}{\partial \theta^2}$$

B – Optimisation

Def 37 : On dit que a est un *point critique* si $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$. [G] 336

Thm 38 : Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a, alors a est un point critique, et $\mathrm{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive). [G] 335–336

- La réciproque est vraie si on suppose en plus $\mathrm{Hess}_a(f)$ définie.
- Si a est un point critique et si $\mathrm{Hess}_a(f)$ admet deux valeurs propres de signes strictement opposés, alors a est un point-selle. FIGURE

Ex 39 : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on retrouve un résultat bien connu :

- Si $f'(a)=0$ et $f''(a)>0$ (resp. $f''(a)<0$), alors f admet un minimum (resp. un maximum) local en a.
- Si $f'(a)=f''(a)=0$ et $f'''(a)\neq 0$, alors a est un point d'inflexion.

[BMP] 24-32 Ex 40 : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax=b$ est le minimum global de $J : x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle - \langle b|x\rangle$.

[R] 372 Thm 41 (des extrema liés) : Soit $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U,\mathbb{R})^{r+1}$, posons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de LAGRANGE, tels que $df(a) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, dg_k(a)$.

[R] 413 **DEV 2** : Existence d'une trajectoire fermée à 3 rebonds sur un billard elliptique.

Rq 42 : Ce théorème permet de ramener la recherche d'un extremum local en dimension n sous r contraintes à la résolution du système carré $n+r$:

$$\left\{ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial e_i}(a) \quad ; \quad g_1(a) = \dots = g_r(a) = 0. \right.$$

[R] 127 Prop 43 : Supposons U convexe.

- Si f est différentiable sur U, alors f est convexe si, et seulement si :
$$\forall (x,y) \in U^2, \quad f(y) - f(x) \geq df(x)(y-x)$$

[R] 329
- Si f est deux fois différentiable sur U, alors f est convexe si, et seulement si pour tout $a \in U$, $\mathrm{Hess}_a(f)$ est (symétrique) positive.

[R] 381 Prop 44 : Si U est convexe, si f est convexe, et si a est un point critique, alors f admet en a un minimum global sur U.

IV - Cas des fonctions du plan : holomorphie

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. On note u et v les applications coordonnées de f dans la base canonique : $f = (u,v)$. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$.

Def 45 : On dit que f est *holomorphe* en z_0 si f est différentiable en z_0 et vérifie la condition de CAUCHY-RIEMANN : $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$. [T] ~59

Le cas échéant, on pose $f'(z) := \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z), \frac{\partial v}{\partial x}(z)\right)$.

Prop 46 : Si f est différentiable en z_0 alors $\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$, $df(z)(h) = \langle \partial_z f(z_0) \mid h \rangle + \langle \partial_{\bar z} f(z_0) \mid \bar h \rangle$ où $\bar h = (h_x, -h_y)$, $\partial_z f(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z), -\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)$ et $\partial_{\bar z} f(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z), \frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)$. [T] ~60-61

Prop 47 : f est holomorphe en z_0 si, et seulement si f est différentiable en z_0 et $\partial_{\bar z} f(z_0) = 0$. Le cas échéant, $f'(z_0) = \partial_z f(z_0)$. [T] ~61

Def 48 : Soit $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^1. On définit *l'intégrale de f le long de γ* comme $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f \circ \gamma(t) \times \gamma'(t)\,dt$. [T] ~69

Thm 49 (formule de CAUCHY) : Soient $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert, $a \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ tels que $\bar B(a,R) \subseteq U$. Supposons f holomorphe sur U. [T] ~77

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad \text{où } \gamma : \begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & a + R(\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

Thm 50 : Si f est holomorphe en z_0, alors f est infiniment différentiable en z_0. [T] 78

RÉFÉRENCES

[G] *Les maths en tête - Analyse* [3e édition] (Xavier Gourdon)

[R] *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation* [3e édition revue et corrigée] (François Rouvière)

[BMP] *Objectif agrégation*

[T] *Analyse complexe pour la licence 3* [2e édition] (Patrice Tauvel)

FIGURE : Extrema, point-selle