213

Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I – Les espaces de Hilbert et leur structure

A- Produit scalaire / hermitien, orthogonalité

[HL] 84 **Def 1** : Un produit scalaire est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\forall (x,y,z) \in \mathcal{H}^3, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

- $\langle x + \lambda y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \lambda \langle x | z \rangle$
- $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$
- $\langle x | x \rangle \geqslant 0$
- $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

[HL] 84 **Ex 2** :
- $(\underline{x}, \underline{y}) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$ est un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$ (dit usuel).
- $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f\bar{g}$ est un produit scalaire sur $C^0([0,1])$.
- $(A,B) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On fixe un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

[HL] 86 **Prop 3** : $\|\cdot\| : x \longmapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme sur $\mathcal{H}$, dite associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

[HL] 84 88 **Def 4** :
- On dit que $(\mathcal{H}, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.
- Si $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ est complet, alors $(\mathcal{H}, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

[HL] 88 **Ex 5** :
- Un espace euclidien ou hermitien est de Hilbert.
- $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour $\langle \cdot|\cdot \rangle : (u,v) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \bar{v}_n$.

On suppose désormais que $(\mathcal{H}, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert

[HL] 86 **Thm 6** (inégalité de Cauchy-Schwarz) : Pour tout $(x,y) \in \mathcal{H}^2$, $|\langle x|y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ avec égalité si, et seulement si (x,y) est liée.

Appli 7 : On définit l'écart angulaire entre deux vecteurs non nuls $x \in \mathcal{H}$ et $y \in \mathcal{H}$ comme $\arccos\left(\frac{|\langle x|y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$.

[HL] 87 **Thm 8** (identité du parallélogramme) :
$$\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2, \quad 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

Rq 9 : Une norme sur $\mathcal{H}$ est associée à un produit scalaire si, et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme (thm de Fréchet - von Neumann - Jordan)

Def 10 : Soit $A \subseteq \mathcal{H}$. On définit l'orthogonal de A comme : [HL] 87
$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in A, \langle x|y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in A} \mathrm{Ker}(\langle \cdot | y \rangle)$$

Prop 11 : Soient $A \subseteq \mathcal{H}$ et $B \subseteq \mathcal{H}$.
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$,
- $B \subseteq A \Rightarrow A^\perp \subseteq B^\perp$
- $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp = \bar{A}^\perp$ [HL] 87
- $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$
- $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

Ex 12

B- Projection sur un convexe fermé, conséquences

Soient C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

Thm 13 (de projection sur un convexe fermé) : FIGURE 1 — DEV 1.a [HL] 91
$$\forall x \in \mathcal{H}, \ \exists ! P_C(x) \in C : \quad \|x - P_C(x)\| = d(x,C) =: \inf_{y \in C} \|x-y\|$$
De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x) | x-y \rangle) \leqslant 0$
Dans le cas de F, le projeté $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$.

Cor 14 : P_C est 1-lipschitzienne, P_F est un projecteur orthogonal de norme 1. [HL] 92~93

Cex 15 : C'est faux si $\mathcal{H}$ est seulement de Banach : dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, tous les $(x,0)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ réalisent $d\left(\binom{0}{1}, \mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}\right)\right)$.

Cor 16 : $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$ (et $\mathcal{H} = \bar{F} \oplus F^\perp$ si F n'est pas supposé fermé). [HL] 93

Cex 17 : C'est faux si F n'est pas fermé : dans $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, pour $F = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on a $F^\perp = \{0\}$ mais $\mathcal{H} \neq F \oplus \{0\} = F$.

[HL] 94 93 Cor 18 : ▸ $F = F^{\perp\perp}$,

▸ Pour tout sev. G de $\mathcal{H}$, $\overline{G} = \mathcal{H} \iff G^{\perp} = \{0\}$. DEV 1.b

[HL] 96 **Thm 19** (de représentation de RIESZ) : $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$, $y \longmapsto \langle \cdot | y \rangle$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, i.e. une isométrie linéaire surjective.

[Bu] 501 Appli 20 : ▸ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$, appelé *produit vectoriel* de x et y, tel que $[x,y,\cdot] = \langle \cdot | x \wedge y \rangle$ où $[\cdot,\cdot,\cdot]$ est le produit mixte.

[Go] 324 ▸ Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$. Il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ *appelé gradient de f en a*, tel que $df(a) = \langle \cdot | \nabla f(a) \rangle$.

[HL] 97 Def 21 : Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2$, $\langle Tx | y \rangle = \langle x | T^* y \rangle$. On l'appelle *adjoint* de T.

On dit que T est *auto-adjoint* si $T = T^*$.

C - Notion de base hilbertienne

[HL] 107 108 ? Def 22 : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}$. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est :

- *orthogonale* si $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle e_i | e_j \rangle = 0$
- *orthonormale* si $\forall (i,j) \in I^2$, $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$
- *totale* si $\overline{\mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\in I})} = \mathcal{H}$.

[HL] 108 Def 23 : Une *base hilbertienne* de $\mathcal{H}$ est une famille orthonormale et totale.

[HL] 113 Thm 24 [admis] : $\mathcal{H}$ est séparable $\iff$ $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne dénombrable.

Dans la suite, on suppose $\mathcal{H}$ séparable, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.

[HL] ? 108 Ex 25 : ▸ En dimension finie pour le produit scalaire usuel, toute base (algébrique) orthonormée est hilbertienne.

▸ $((\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Rq 26 : Dans un espace euclidien ou hermitien, les notions de base hilbertienne et de base (algébrique) orthogonal coïncident. Ce n'est plus vrai en dimension infinie, comme on le verra par la suite.

[HL] 109 Prop 27 : Soit $(e_0, \dots, e_n) \in \mathcal{H}^{n+1}$ une famille orthonormale, posons $F = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Alors $P_F = \sum_{k=0}^{n} \langle \cdot | e_k \rangle e_k$.

Thm 28 (procédé de GRAM-SCHMIDT) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ libre. On définit $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{e}_k = f_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_k | e_i \rangle e_i = f_k - P_{\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_{k-1})}(f_k)$, et $e_k = \tilde{e}_k / \|\tilde{e}_k\|$. [HL] 112

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale. FIGURE 2

Thm 29 : Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée. Les assertions suivantes sont équivalentes : [HL] ~109

- $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$
- $\forall x \in \mathcal{H}$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x | e_n \rangle e_n$ au sens $\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle x | e_n \rangle e_n \right\| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
- $\forall x \in \mathcal{H}$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x | e_n \rangle|^2$ (égalité de BESSEL-PARSEVAL)
- $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\perp} = \{0\}$

Thm 30 : $x \longmapsto (\langle x | e_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$. [HL] 109

II - L'exemple fondamental : les espaces L^2

Thm 31 (RIESZ, FISHER) [admis] : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour f et g dans $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$, posons $\langle f | g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)}\, d\mu(x)$ (produit scalaire usuel). [HL] ~125

L'espace $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ muni de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un espace de Hilbert.

A - Cas des fonctions périodiques : séries de FOURIER

Dans ce paragraphe, $\mathcal{H} = L^2_{2\pi}$ est l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable sur $[-\pi,\pi]$. On pose $\forall (f,g) \in \mathcal{H}^2$, $\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \frac{dt}{2\pi}$. On pose $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : t \longmapsto e^{int}$. On note $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n + u_{-n}$.

Prop 32 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale. [EA] 172

Def 33 : Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in L^1_{2\pi}$, on pose $c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$. Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors $c_n(f) = \langle f | e_n \rangle$. On l'appelle n^e *coefficient de* FOURIER de f. [EA] 173

[EA] 184-186 <u>Déf 34</u> : Soient $f \in \mathcal{H}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On pose :

- $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ (noyau de Dirichlet)
- $K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ (noyau de Fejér)
- $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n = D_N * f$
- $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = K_N * f$.

<u>Rq 35</u> : $S_N(f)$ est le projeté de f sur $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{-N \leq n \leq N})$.

[EA] 184-186 <u>Prop 36</u> : Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

- $D_N(-t) = D_N(t) = \sin\left((N+\frac{1}{2})t\right) / \sin(t/2)$
- $\|D_N\|_1 = 1$.
- $K_N(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{Nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2 \geq 0$
- $\|K_N\|_1 = 1$
- $\forall \delta \in]0, \pi], \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} K_N(t)\,dt \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

[EA] 190 <u>Thm 37</u> (de Fejér) :

- $\forall f \in C^0_{2\pi}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
- $\forall p \geq 1, \forall f \in L^p_{2\pi}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

[EA] 193 <u>Cor 38</u> : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$. En particulier, $\forall f \in L^2_{2\pi}$,

- $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
- $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$. Plus précisément, $f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie linéaire de $L^2_{2\pi}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$.

<u>Appli 39</u> : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

B- Cas des variables aléatoires

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles, et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ une sous-tribu.

<u>Prop 40</u> : $(X,Y) \longmapsto \mathbb{E}[XY]$ est le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui en fait donc un espace de Hilbert.

<u>Rq 41</u> : $\mathrm{Cov} : (X,Y) \longmapsto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ est un semi-produit scalaire (i.e. un produit scalaire ne vérifiant pas $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$) sur $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Sa semi-norme associée est $X \longmapsto \sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$. On dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$.

<u>Rq 42</u> : On dit que X et Y sont non corrélées si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, i.e. si X et Y sont orthogonales pour Cov. Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont non corrélées, mais la réciproque est fausse en général (elle est cependant vraie si X et Y sont des vecteurs gaussiens).

<u>Déf 43</u> : L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ est le projeté de X sur $L^2(\mathcal{B})$. [CR] 77
On la note $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$, et elle est caractérisée par $\forall Z \in L^2(\mathcal{B})$, $\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Z]$

<u>Rq 44</u> : Si on note $\langle X | Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$, $F = L^2(\mathcal{B})$ et $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = P_F(X)$, cette caractérisation dit que $P_F(X)$ est l'unique vecteur de F tel que $\forall Z \in F, \langle X | Z \rangle = \langle P_F(X) | Z \rangle$, i.e. $\forall Z \in F, \langle X - P_F(X) | Z \rangle = 0$, i.e. $X - P_F(X) \in F^\perp$: on retombe sur nos pattes ! [CR] ~76

C- Opérateurs de Hilbert-Schmidt [LM] 114-122

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mathcal{H} := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est séparable. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

<u>Déf 45</u> : On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$. On note $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$.

<u>Thm 46</u> : $T \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{HS}(\mathcal{H})$, et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$ (finie ou non) ne dépend pas du choix de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On la note $\|T\|_2$.

<u>Prop 47</u> : $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par :
$$\forall (S,T) \in \mathcal{HS}(\mathcal{H})^2, \quad \langle S | T \rangle_2 := \sum_{n=0}^{+\infty} \langle Se_n | Te_n \rangle.$$

<u>Lemme 48</u> : L'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$.

<u>Thm 49</u> : $T \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \exists K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu) : T = T_K$
où $T_K : f \in \mathcal{H} \longmapsto \int_\Omega K(x, \cdot) f(x)\,d\mu(x)$.

DEV 2

FIGURE 1 : Projection sur un convexe fermé

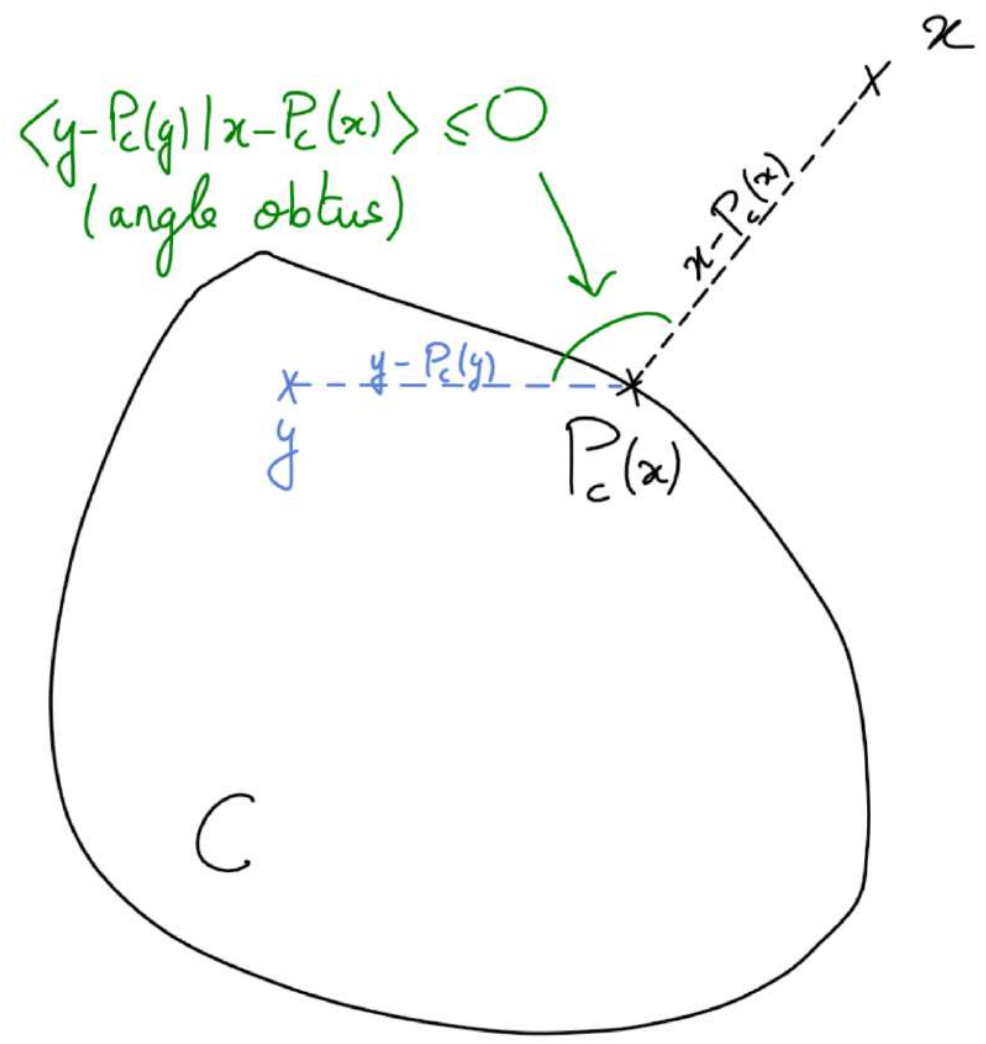
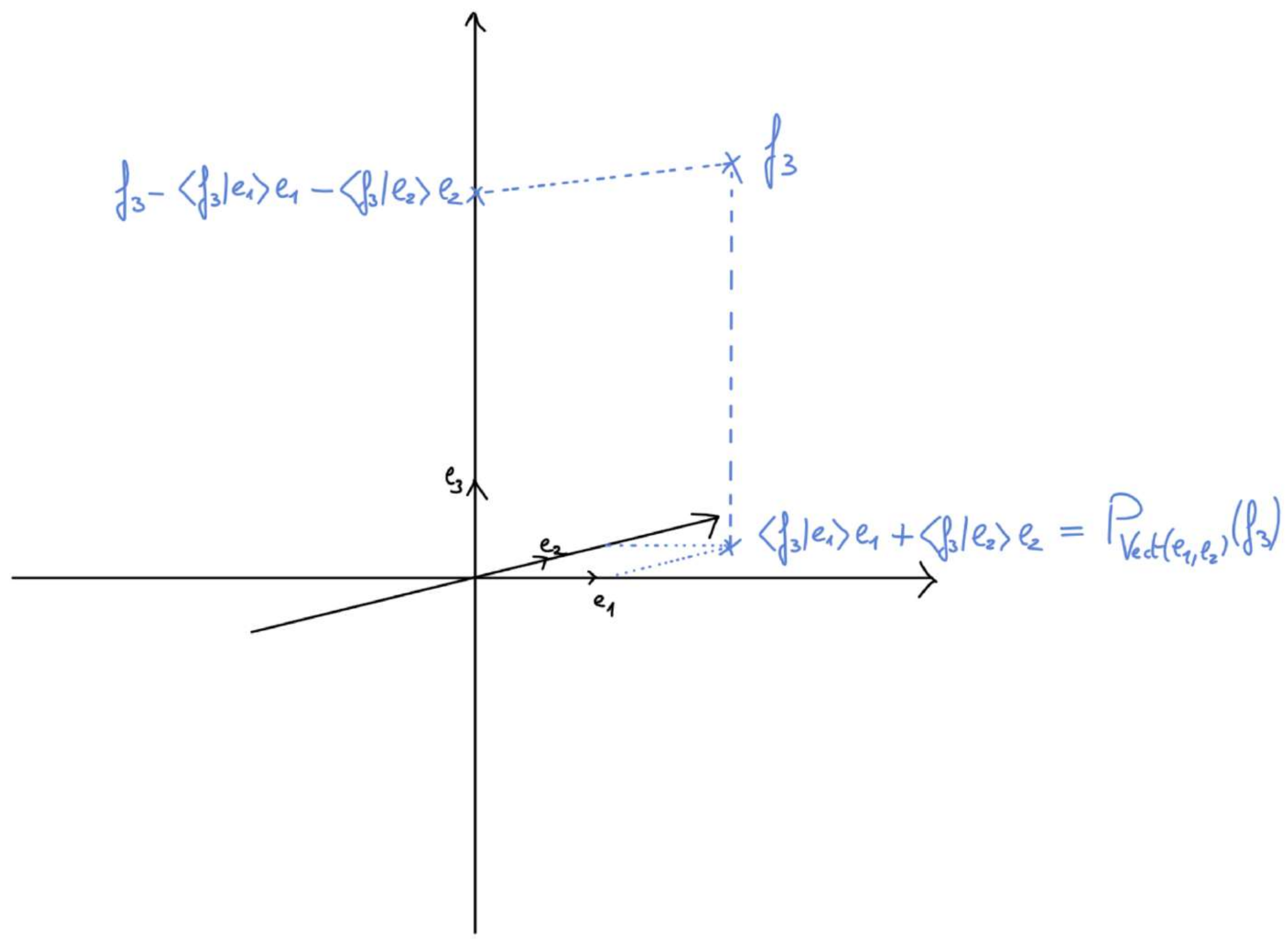


FIGURE 2 : Procédé de Gram-Schmidt



Références

[HL]
[EA]
[Go]
[Bu]
[LM]
[CR]