208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I – Normes et opérateurs sur un espace vectoriel

A- Norme sur un espace vectoriel

[G] 7 **Def 1**: Une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (séparation)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogénéité)
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

[G] 7-8 **Ex 2**: ▸ Le module est une norme sur $\mathbb{K}$.

- Sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_p : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, avec $p \in [1, +\infty[$, est une norme.
- Sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ est une norme.
- Soit (X,d) un espace métrique compact. L'application suivante est une norme :

$$\|\cdot\|_\infty : f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K}) \longmapsto \max_{x \in K} |f(x)|$$

- Pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p : f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}) \longmapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.

[G] 47 **Def 3**: Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

Ex 4: ▸ Sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq n \|\cdot\|_\infty$.

- Sur $C([0,1], \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$, mais $\|\cdot\|_\infty \not\leq \|\cdot\|_1$.

Prop 5: ▸ Sur $\mathbb{K}^n$, pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_\infty$.

- Sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_\infty$

Corollaire : sur ces deux espaces, $\|\cdot\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|\cdot\|_\infty$.

[BP] 157 158 175 **Def 6**: Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace de Lebesgue, et $\|\cdot\|_p$ la norme habituelle sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Les espaces $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ sont des espaces vectoriels normés.

B- Opérateurs (applications linéaires continues)

Thm 7: Soit $T : E \longrightarrow F$ linéaire. Sont équivalentes : [G] 48

1. T est continu sur E
2. T est continu en 0_E.
3. T est uniformément continue sur E.
4. T est lipschitzien
5. T est borné sur E, i.e. $\exists C > 0 : \forall x \in E,\ \|Tx\| \leq C\|x\|$
6. T est borné sur $\overline{B(0,1)}$
7. T est borné sur $S(0,1)$

Notations 8: On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. On pose également $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

Ex 9: L'application $D : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, $f \longmapsto f'$ est linéaire mais pas continue. Cependant, elle le devient si on munit $C^1([0,1])$ de la norme $f \longmapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. La continuité dépend donc de la norme !

Prop 10: La continuité est préservée pour des normes équivalentes.

Def 11: Soient $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ deux normes sur E et sur F. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. [G] 48
On pose $|||T||| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \setminus \{0\} \right\}$.

Prop 12: L'application $|||\cdot|||$ est appelée norme d'opérateur, ou norme subordonnée [G] 48
à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. C'est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Ex 13: ▸ Soit $T : u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{12^n}$: on a $|||T||| = \frac{12}{11}$

- Soit $T : f \in (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longmapsto f'$: on a $|||T||| = 1$.

Prop 14: Soit $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé.

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall g \in \mathcal{L}(F,G),\quad |||g \circ f||| \leq |||f||| \cdot |||g|||.$$ [G] 48

Prop 15: Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$|||T||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \inf \{ C > 0 \mid \forall x \in E, \|Tx\|_F \leq C \|x\|_E \}$$ [G] 48

Lemme 16 : Si $T : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors T est de rang fini r si, et seulement s'il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_r : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaires, linéairement indépendantes, et $(a_1, \dots, a_r) \in F^r$ libre, telles que $\forall x \in E$, $T(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\, a_i$.

[G] ≈55-56 **Thm 17** : Soit $T : E \to F$ linéaire et de rang fini.
T est continu si, et seulement si $\mathrm{Ker}(T)$ est fermé.

II – Espaces de dimension finie

Dans cette section, on suppose E de dimension finie n.

A- Équivalence des normes

Def 18 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $x \in E$, notons $(x_1, \dots, x_n)$ le vecteur coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit $\|x\|_p$ comme étant $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Prop 19 : Toute norme sur E est une application continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

[G] 50 **Thm 20** : Toutes les normes sur E sont équivalentes. DEV1

Cor 21 : Toute application linéaire de E dans F est continue.

Cor 22 : E est complet.

Cor 23 : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Appli 24 : Soit M un sous-espace vectoriel de F de dimension finie.
$\forall y \in F$, $\exists x \in M$: $d(y, F) = \|x - y\|_F$.

[G] 50 **Cor 25** : Les compacts de E sont les fermés bornés.

Rq 26 : On munit $\mathbb{R}[X]$ de $\|\cdot\|_\infty$: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \longmapsto \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$. La boule unité est fermée et bornée, mais elle n'est pas compacte : la dimension finie est donc cruciale !

Thm 27 (de Riesz) : E est de dimension finie si, et si $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte. DEV1 [G] 56

B- Normes matricielles

Def 28 : Une norme matricielle est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, i.e. une norme $\|\cdot\|$ vérifiant $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$.

Ex 29 : D'après Prop 14, toute norme subordonnée à une norme sur $\mathbb{K}^n$ est une norme matricielle, en confondant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Thm 30 : Pour $(p,q) \in [1, +\infty]^2$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $|||A|||_{p,q} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\}$ [Rv] 24
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a :

- $|||A|||_{1,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$
- $|||A|||_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$
- $|||A|||_{2,2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = |||A^*|||_2$ où $A^* = {}^t\bar{A}$ et $\rho(M) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} |\lambda|$.

III – Espaces de Banach : exemples et applications

A- Définition et premiers exemples

Def 31 : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. [G] 47

Ex 32 :
- Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.
- $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ est de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Thm 33 (de Riesz-Fisher) : $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. [BP] 166-176

Prop 34 : Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si (E, N_1) est de Banach pour N_1, alors (E, N_2) est de Banach. [G] 48

Thm 35 : (E,N) est de Banach si, et seulement si toute ses séries normalement convergentes sont convergentes (dans (E,N)).

[G] 49 **Prop 36** : Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est de Banach, alors $(\mathcal{L}(E,F), |||\cdot|||)$ est de Banach.

[G] 49 **Appli 37** : (lemme de VON NEUMANN) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de Banach.
Si $|||u||| < 1$, alors $id_E - u$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$

B- Espaces de Hilbert

[HL] 84 **Def 38** : Un produit scalaire hermitien sur E est une application $\langle \cdot,\cdot \rangle : E^2 \to \mathbb{K}$ telle que pour tous $(x,y,z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $\langle x+\lambda y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \lambda \langle y,z\rangle$
- $\langle x, y+\lambda z\rangle = \langle x,y\rangle + \bar{\lambda} \langle x,z\rangle$
- $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
- $\langle x,x\rangle \geq 0$
- $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

L'application $\|\cdot\| : x \longmapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme sur E, appelée norme associée au produit scalaire hermitien $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

[HL] 84 **Ex 39** : • Sur $\mathbb{K}^n$, $(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est un produit scalaire hermitien.

[HL] 85 • Sur $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(f,g) \longmapsto \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$ est un produit scalaire hermitien.

[HL] 88 **Def 40** : On dit que $(\mathcal{H}, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert si $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|$ associée à $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

[HL] 88 **Ex 41** : Munis des produits scalaires hermitiens de Ex37, $\mathbb{K}^n$ et $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ sont des espaces de Hilbert.

Thm 42 (de FRÉCHET – VON NEUMANN – JORDAN) : Une norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire hermitien si, et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme : $\forall x,y$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Le cas échéant, le produit scalaire hermitien associé est $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x+i^k y\|$.

[HL] 91 **Thm 43** (de projection sur un convexe fermé) : Soient $(\mathcal{H}, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et C un convexe de $\mathcal{H}$.

$$\forall x \in \mathcal{H},\ \exists! y \in C : \|x-y\| = d(x,C).$$

Thm 44 (de RIESZ) : $\forall \varphi \in \mathcal{H}'$, $\exists! x \in \mathcal{H}$: $\varphi = \langle \cdot | x \rangle$ **DEV 2**

RÉFÉRENCES

[G] : Les maths en tête – Analyse (Xavier Gourdon) [3e édition]

[HL] : Éléments d'analyse fonctionnelle (Francis Hirsch, Gilles Lacombe)

[BP] : Théorie de l'intégration (Marc Briane, Gilles Pagès) [7e édition]

[Rv] : Petit guide du calcul différentiel (François Rouvière) [4e édition]