205

Espaces complets. Exemples et applications.

Dans cette leçon, (X,d) est un espace métrique.

I – Complétude d'un espace métrique

[G] 20 **Def 1**: Une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :
$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geq N,\ \forall m\geq N,\ d(x_n,x_m)\leq\varepsilon.$$

[G] 20 **Prop 2**: • Une suite convergente est de Cauchy
• Une suite de Cauchy est bornée.

Cex 3: Une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente. Par exemple, $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ pour $|\cdot|$, donc elle est de Cauchy pour $|\cdot|$. Pourtant, elle ne converge pas dans $(\mathbb{Q},|\cdot|)$.

[G] 20 **Def 4**: On dit que (X,d) est complet si toute de Cauchy de X converge.

[G] 20 **Prop 5**: • Un produit fini d'espaces complets est complet pour la distance produit.
• Une partie fermée d'un espace complet est complète pour la distance induite.

Rq 6: La complétude d'un espace dépend fortement de sa métrique.
Contre-exemple : $\mathbb{R}$ n'est pas complet pour $d : (x,y)\longmapsto|\arctan(x)-\arctan(y)|$ (la suite $(n)_n$ est de Cauchy, mais ne converge pas).

[G] 20 **Thm 7** (des fermés emboîtés) : Supposons (X,d) complet. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X telle que $\sup_{(x,y)\in F_n^2} d(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réduite à un singleton.

II – Exemples usuels et remarquables d'espaces complets

A – Espaces de Banach

Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Def 8: On dit que $(E,\|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach si E est complet pour la distance induite par $\|\cdot\|_E$. [G] 47

Prop 9: La complétude ou non est préservée par équivalence des normes. [G] 47-48

Ex 10: • Tout espace de dimension finie est de Banach (quelle que soit la norme choisie). [G] 50
• Si X est compact, alors $(C^0(X,\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$ est de Banach.
• Si X est compact, alors $C^1([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$, mais il l'est pour $f\longmapsto\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$.

Ex 11: Notons $E=\mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$ l'espaces des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $f\in E$, on pose $K(f)=\inf L(f)$ où : [FGN] 131
$$L(f)=\{\lambda>0 \mid \forall(x,y)\in[0,1]^2,\ |f(x)-f(y)|\leq\lambda|x-y|\}$$
et $N(f)=|f(0)|+K(f)$.
L'espace E est de Banach pour la norme N, mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

Thm 12: $(E,\|\cdot\|_E)$ est de Banach si, et seulement si toute série absolument convergente de E converge dans $(E,\|\cdot\|_E)$. [G] 52

Thm 13: Si $(F,\|\cdot\|_F)$ est de Banach, alors $(\mathcal{L}(E,F),|||\cdot|||)$ également. [G] 48

Appli 14 (lemme de von Neumann) : Soit $T\in\mathcal{L}(E)$ tel que $|||T|||<1$. Alors id_E-T est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty}T^n$ (cette série converge normalement). [G] 49

Cor 15: L'ensemble $GL(E)$ des opérateurs continus inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est ouvert. [G] 49-50

B - Exemple : les espaces L^p

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

[BP] 157 158 175 165 157 <u>Def 16</u> : Pour $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on pose :

- Pour $p \in [1,+\infty[$, $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|f\|_\infty := \inf\{C>0 \mid \mu(\{x\in\Omega \mid |f(x)|>C\})=0\}$

Et pour $p \in [1,+\infty]$, on pose $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable $\mid \|f\|_p < +\infty\}$
et $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)/\sim$ où $f \sim g \iff \mu(\{x\in\Omega \mid f(x)\neq g(x)\}) = 0$.
Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ ou $\Omega = \mathbb{Z}$ et μ est la mesure de comptage sur Ω, on note plutôt $\ell^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mu)$.

[BP] 165 176 <u>Prop 17</u> : $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, et $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ presque partout.

[BP] 159 177 <u>Thm 18</u> (inégalité de Hölder) : Soit $(p,q)\in[1,+\infty]^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=0$.

$$\forall f\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu), \quad \forall g\in L^q(\Omega,\mathcal{A},\mu), \qquad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

[BP] 166 176 <u>Thm 19</u> (de Riesz-Fisher) : Pour tout $p\in[1,+\infty]$, $(L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

C - Espaces de Hilbert

Soient $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, notons $\|\cdot\|$ la norme associé à $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

[HL] 84 <u>Def 20</u> : On dit que $(\mathcal{H},\langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert si $(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

[HL] 84 85 <u>Ex 21</u> :
- Tout espace euclidien ou hermitien est de Hilbert pour le produit scalaire ou hermitien canonique.
- $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est de Hilbert pour $\langle\cdot|\cdot\rangle : (f,g)\longmapsto \int_\Omega f\,\overline{g}\,d\mu$.

<u>Thm 22</u> (de Fréchet - von Neumann - Jordan) : $(E,\|\cdot\|_E)$ est de Hilbert si, et seulement si $\forall (x,y)\in E^2$, $\|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 = 2(\|x\|_E^2+\|y\|_E^2)$.

Soient C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

<u>Thm 23</u> (de projection sur un convexe fermé) : FIGURE **DEV 1.a** [HL] 91

$$\forall x\in\mathcal{H}, \quad \exists!\, P_C(x)\in C : \quad \|x-P_C(x)\| = d(x,C) =: \inf_{y\in C}\|x-y\|$$

De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par $\forall y\in C$, $\mathrm{Re}(\langle x-P_C(x)|x-y\rangle)\leq 0$
Dans le cas de F, le projeté $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x)\in F$ et $x-P_F(x)\in F^\perp$. [HL] 92

<u>Rq 24</u> : Il suffit de supposer C complet et $\mathcal{H}$ préhilbertien. [HL] 92

<u>Cor 25</u> : P_C est 1-lipschitzienne, P_F est un projecteur orthogonal de norme 1. [HL] ~92

<u>Cex 26</u> : C'est faux si $\mathcal{H}$ est seulement de Banach : dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$, tous les $(x,0)$, $-1\leq x\leq 1$ réalisent $d(\binom{0}{1}, \mathrm{Vect}(\binom{1}{0}))$.

<u>Cor 27</u> : $\mathcal{H} = F\oplus F^\perp$ (et $\mathcal{H} = \overline{F}\oplus F^\perp$ si F n'est pas supposé fermé). [HL] 93

<u>Cex 28</u> : C'est faux si F n'est pas fermé : dans $\mathcal{H}=\ell^2(\mathbb{N})$, pour $F=\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on a $F^\perp = \{0\}$ mais $\mathcal{H} = F\oplus\{0\} = F$.

<u>Cor 18</u> :
- $F = F^{\perp\perp}$, [HL] 94 ?
- Pour tout sev. G de $\mathcal{H}$, $\overline{G} = \mathcal{H} \iff G^\perp = \{0\}$. **DEV 1.b**

<u>Thm 19</u> (de représentation de Riesz) : $J : \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}'$, $y\longmapsto\langle\cdot|y\rangle$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, i.e. une isométrie linéaire surjective. [HL] 96

<u>Def 20</u> : Pour tout $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un unique $T^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que : $\forall (x,y)\in\mathcal{H}^2$, $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$. On l'appelle adjoint de T. [HL] 97

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mathcal{H} := L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est séparable. Soit $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$

<u>Def 21</u> : On dit que T est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2<+\infty$. On note $HS(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$.

Thm 22 : $T \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}) \iff T^* \in \mathcal{HS}(\mathcal{H})$, et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$ (finie ou non) ne dépend pas du choix de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\|T\|_2$.

Prop 23 : $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par :
$\forall (S,T) \in \mathcal{HS}(\mathcal{H})^2, \quad \langle S|T\rangle_2 := \sum_{n=0}^{+\infty} \langle Se_n|Te_n\rangle$.

DEV 2

Lemme 24 : L'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$.

Thm 25 : $T \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}) \iff \exists K \in L^2(\Omega\times\Omega, \mu\otimes\mu) : T = T_K$
où $T_K : f \in \mathcal{H} \longmapsto \int_\Omega K(x,\cdot) f(x)\, d\mu(x)$.

III - Utilisation de la complétude

A - Prolongement d'applications

[G] 23-24 **Thm 26** (de prolongement des applications uniformément continues) : Soient (Y,δ) un espace métrique, $D \subseteq X$ dense, et $f : D \longrightarrow Y$ uniformément continue. Si (Y,δ) est complet, alors f se prolonge à X de manière unique. De plus, ce prolongement est uniformément continu sur X.

Cor 27 : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $D \subseteq E$ dense, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(D,F)$ continu. L'opérateur T se prolonge de manière unique à E en un opérateur linéaire continu, qui plus est de même norme que T

Appli 28 : Extension de la transformée de Fourier à L^2.

B - Point fixe de Picard & applications

[G] 21 **Thm 29** (du point fixe de Picard) : Supposons (X,d) complet, soit $f : X \longrightarrow X$ contractante (i.e. lipschitzienne de rapport $\lambda \in]0,1[$). Alors f admet un unique point fixe. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

Cex 30 :
- Défaut de complétude : $X =]0,1]$, $f : x \longmapsto x/2$
- L'hypothèse $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ ne suffit pas à remplacer l'hypothèse de contraction : $X = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ (en fait ça marche si X est compact)

Appli 31 : Racine carrée d'un opérateur positif.

Thm 32 (de Cauchy-Lipschitz) : Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, [G] 374
$F : I \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue, et telle que $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists \lambda_K > 0$ tel que $\forall t \in K$, $F(t,\cdot)$ est λ_K-lipschitzienne. Pour tout $(t_0,y_0) \in I\times\mathbb{R}^d$, il existe une unique fonction y telle que $y(t_0) = y_0$ et : $\forall t \in I$, $y'(t) = F(t, y(t))$.

Références

[BP] Briane-Pagès [7e édition]
[HL] Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle
[G] Gourdon Analyse [3e édition]

FIGURE : Projection sur un convexe fermé