NOM : UMBER Prénom : Pierre Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 220 : Equations différentielles $X' = f(t,X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Autre sujet : 218 : Applications des formules de Taylor.

I. Généralités sur les équations différentielles

1) Premières définitions

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $d < \infty$,

Def 1 : On appelle équation différentielle d'ordre n la donnée de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times E^n$ ouvert et $f : \mathcal{U} \to E$. L'équation différentielle associée est $(\mathcal{E}) : y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$

Def 2 : On appelle solution de $(\mathcal{E})$ la donnée (I, φ), où I est un intervalle, $\varphi : I \to E$ est D^n et :
- $\forall t \in I, (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \mathcal{U}$
- $\forall t \in I, \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$

Ex. 3 : On considère $y' = y$. Alors une solution de cette équation est $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$

Prop 4 (passage à l'ordre 1) : On considère $\varphi : I \xrightarrow{D^n} E$. On pose
$$G : \mathcal{U} \to E^n, \quad (t, y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_2, \dots, y_{n-1}, f(t, y_1, \dots, y_n))$$
et $\psi = (\varphi, \dots, \varphi^{(n-1)})$

alors : (I, φ) est solution de $(\mathcal{E}_F) \Leftrightarrow (I, \psi)$ est solution de $(\mathcal{E}_G)$

Ainsi, on se ramène à l'étude d'équations d'ordre 1

On suppose $n = 1$

Def 5 : On appelle problème de Cauchy de $(\mathcal{E})$ la donnée de $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$. On cherche à trouver une solution (I, φ) de $(\mathcal{E})$ telle que $t_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

Prop 6 : On suppose f $\mathcal{C}^0$. Alors les solutions de $(\mathcal{E})$ sont $\mathcal{C}^1$. De plus, si $\varphi : I \to E$ est $\mathcal{C}^1$, alors (I, φ) est solution de (E) si et seulement si :
- $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in \mathcal{U}$
- $\forall t \in I, \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \varphi(t))\,dt$

2) Solutions maximales et globales

Def 7 : (I, φ) est une solution maximale si elle ne peut pas être prolongée en une solution sur un intervalle plus grand

Def 8 : si $\mathcal{U} = J \times V$, alors (I, φ) est une solution globale si $I = J$

Prop 9 : Toute solution peut être prolongée en une solution maximale

Prop 10 : Toute solution globale est maximale

C-Ex 11 : Pour $y' = y^2$, $\varphi : t \in]-\infty; 1[\mapsto \frac{1}{1-t}$ est solution maximale et non globale

3) Théorèmes d'existence

Def 12 : f est localement lipschitzienne en la seconde variable si : $\forall (t, x) \in \mathcal{U}, \exists I \times V \subset \mathcal{U}$, voisinage de (t, x), $\exists k \geq 0, \forall s \in I$, $\forall y_1, y_2 \in V, \|f(s, y_1) - f(s, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$

On dira que f vérifie (C.L.).

DEV $\frac{}{1}$

DEV. 1 (théorème de Cauchy-Lipschitz) : On suppose que f vérifie (C.L.). Soit $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$. Alors ce problème de Cauchy admet une solution. De plus, si (I, φ) et (J, ψ) sont deux solutions, alors : $\forall t \in I \cap J, \varphi(t) = \psi(t)$ (unicité locale)

Th. 13 (Cauchy-Peano) : On suppose f $\mathcal{C}^0$. Alors tout problème de Cauchy admet une solution et les solutions maximales sont déf. sur un intervalle ouvert.

CHEx 14 : On perd l'unicité : $y' = \frac{1}{3}|y|^{2/3}$, $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^3$ sont solutions

Th. 15 (Cauchy-Lipschitz global) : On suppose $\mathcal{U} = I \times V$ et que, pour tout $t \in I$, il existe $J \subset I$, $t \in J$, J ouvert, $\exists k \geq 0$:
$$\forall s \in J, \forall y_1, y_2 \in V, \|f(s,y_1) - f(s,y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$
alors les solutions maximales sont globales

Rem. 16 : Cela englobe les équations différentielles linéaires

4) Le lemme de Gronwall

Prop 17 : Soit $u, a : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, $a \geq 0$, $K \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$
On suppose que : $\forall t \in I$, $u(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} a(\tau) u(\tau)\, d\tau$
alors : $\forall t \in I$, $u(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$
(lemme de Gronwall)

App 18 : Soit (I, φ), (I, ψ) solutions de $(\mathcal{E})$. On suppose que $\mathcal{U} = I \times V$ et que : $\forall s \in I, \forall y_1, y_2 \in V, \|f(s,y_1) - f(s,y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$
alors : $\forall t$, $\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| e^{k(t-t_0)}$

5) Sortie sur tout compact

On suppose ici que f vérifie (C.L.)

Lemme 19 : $\exists I \times V \subset \mathcal{U}$ voisinage de (t_0, x_0) tel que : $\forall (t,x) \in I \times V$, il existe une solution au problème (t,x) définie sur I

Th 20 (sortie sur tout compact) : On suppose $\mathcal{U} = I \times V$, soit $(]\alpha;\beta[, \varphi)$ solution maximale. On suppose $\beta \in I$. Alors : $\forall K \subset E$ compact, $\exists b$, $\forall t \in [b, \beta[$, $\varphi(t) \notin K$. En particulier, $\lim_{t \to \beta} \|\varphi(t)\| = +\infty$

Ex 21 : $y' = y^2$ et $\varphi : t \in]-\infty; 1[\mapsto \frac{1}{1-t}$

6) Théorème de prolongement

Th 22 : On suppose $\mathcal{U} = I \times V$ et f $\mathcal{C}^0$. Soit $(]\alpha;\beta[, \varphi)$ solution, $\beta \in I$. On suppose que $\{(t, \varphi(t)), t \in [\alpha;\beta[\}$ est borné. Alors φ se prolonge au delà de β

Cor 21 : Si $\mathcal{U} = I \times V$, f est $\mathcal{C}^0$ et bornée, alors les solutions maximales sont globales

Cor 22 : Si $\mathcal{U} = I$, f est $\mathcal{C}^0$ et si, localement, f vérifie $\|f(t,y)\| \leq C_1 + C_2 \|y\|$, alors les solutions maximales sont globales

II Equations Autonomes

1) Définitions

Def 23 : On appelle équation autonome $f : \mathcal{U} \subset E \to E$, où $(\mathcal{E}) : y' = f(y)$

Prop 24 : Soit (I, φ) solution de $(\mathcal{E})$. Alors $\varphi_a : \begin{array}{l} I - a \to E \\ t \mapsto \varphi(t+a) \end{array}$ est solution de $(\mathcal{E})$

Prop 25 : Si f vérifie (C.L) alors, pour (I, φ) solution maximale :
- $\exists t$, $\varphi'(t) = 0 \Rightarrow \varphi = \text{cte}$ et $I = \mathbb{R}$
- $\exists t_1, t_2$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow I = \mathbb{R}$ et $t_2 - t_1$ est une période de φ

Def 26 : On appelle portraits de phase de $(\mathcal{E})$ la réunion des images des solutions maximales de $(\mathcal{E})$

Rem 27 : Si f vérifie (C.L.), on a une réunion disjointe

Ex 28 : le pendule $y'' = -\sin(y)$, on in

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\sin(y) \end{cases}$$

2) Intégrale première

Def 29 : On appelle intégrale première de $(\mathcal{E})$ la donnée de $H : \mathcal{U} \xrightarrow{D^1} \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathcal{U}$, $dH_x(f(x)) = 0$
$$\left(\begin{array}{l} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \langle \nabla H(x), f(x) \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) f_i(x) = 0 \end{array} \right)$$

Prop 30 : Soit H intégrale première de $(\mathcal{E})$. Alors l'image d'une solution de $(\mathcal{E})$ est incluse dans une fibre de H

Ex 31 : Pour le pendule, $H(y,z) = \frac{z^2}{2} - \cos(y)$ est une intégrale première

III. Etude qualitative

1) Quelques définitions : On considère $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times E \to E$

Def 32 : On appelle courbe intégrale les courbes $\{(t, \varphi(t)), t \in I\}$ où (I, φ) est une solution de $(\mathcal{E})$

Def 33 : On appelle courbe isocline les fibres de f.

2) Cas où $d = 1$

Prop 34 : On pose $\Gamma_0 := \{f = 0\}$, $\mathcal{U}_+ := \{f > 0\}$ et $\mathcal{U}_- := \{f < 0\}$. Alors les courbes intégrales sont croissantes sur $\mathcal{U}_+$, décroissantes sur $\mathcal{U}_-$ et peuvent stationner sur Γ_0

Ex 35 : Voir l'annexe pour $y' = x - y^2$

Prop 36 : Si f vérifie (C.L.) et $(\mathcal{E})$ est autonome, alors les courbes intégrales sont soit strictement croissantes, strictement décroissantes, ou constantes

3) Point d'équilibre

Def 37 : y_0 est un point d'équilibre de $(\mathcal{E})$ si $t \geq t_0 \mapsto y_0$ est une solution de $(\mathcal{E})$

Prop 38 : dans le cas autonome, les points d'équilibres sont les solutions de l'équation $f(y) = 0$

Prop 39 : On suppose $(\mathcal{E})$ autonome, f $\mathcal{C}^0$ et $([t_0 ; +\infty[, \varphi)$ solution. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} \varphi = y_0 \in \mathcal{U}$. Alors y_0 est un point d'équilibre

4) Stabilité *

On se place dans (C.L.) et l'on suppose les problème (t_0, x_0) admettent une solution $\varphi_{x_0} : [t_0 ; +\infty[\to E$

Def 41 : φ_{x_0} est stable si : $\exists V$ voisinage de x_0, $\exists C > 0$,

$$\forall x \in V, \forall t \geq t_0, \ \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_x(t)\| \leq C \|x - x_0\|$$

* **Ex 40** : Les points d'équilibre du pendule sont les $(0, k\pi)$

Def 42 : φ_{x_0} est instable si φ_{x_0} n'est pas stable

Def 43 : φ_{x_0} est asymptotiquement stable si l'on peut remplacer C dans la def. 40 par $\gamma(t)$, où $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma(t) = 0$

Si $\gamma(t) = e^{-At}$, $A > 0$, on dit que φ_{x_0} est exponentiellement stable

Def 44 : Dans le cas où y_0 est un point d'équilibre, on associe ces dénominations au point via $\varphi_{y_0} : t \geq t_0 \mapsto y_0$

Ex 45 : Pour le pendule, les $(0, 2k\pi)$ sont des points seulement stables et les $(0, (2k+1)\pi)$ sont instables

DEV 2 : (Système proies-prédateurs) Etude qualitative du système

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, d > 0, \quad x_0, y_0 > 0$$

DE 2

5) Théorème de stabilité de Lyapunov : $\mathbb{C}$

Th 46 : On considère $y' = Ay$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors :

i) 0 est ~~asymptotiquement~~ exponentiellement stable $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), \mathrm{Re}(\lambda) < 0$

ii) 0 est stable $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ et le bloc de Jordan associé à λ est diagonalisable

Th 47 (admis) : On considère $f : \mathcal{U} \subset E \to E$ $\mathcal{C}^1$, $(\mathcal{E}) : y' = f(y)$ et $a \in \mathcal{U}$, $f(a) = 0$

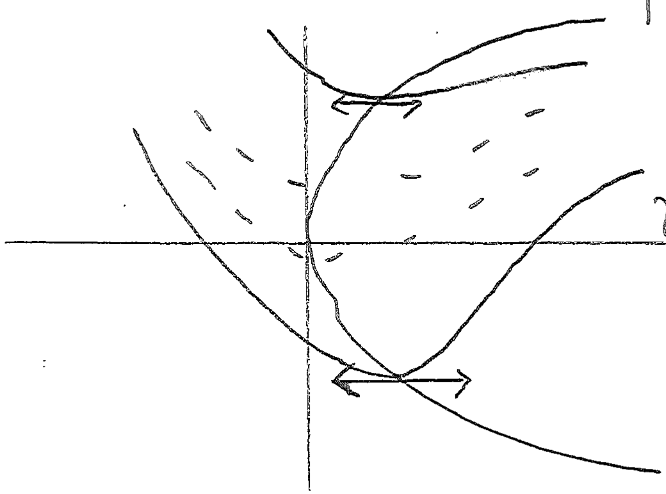
alors : i) $\forall \lambda \in Sp(df_a), \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow a$ est exponentiellement stable

ii) $\exists \lambda \in Sp(df_a), \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow a$ est instable

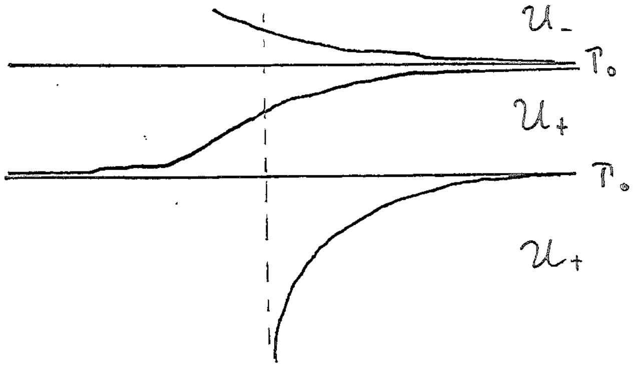
(Théorème de stabilité de Lyapunov)

*Annexe :

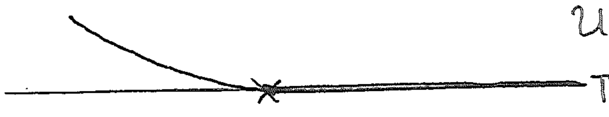
(1) courbes isoclines: $y' = x - y^2$
intégrales



(2) Autonome, $d = 1$

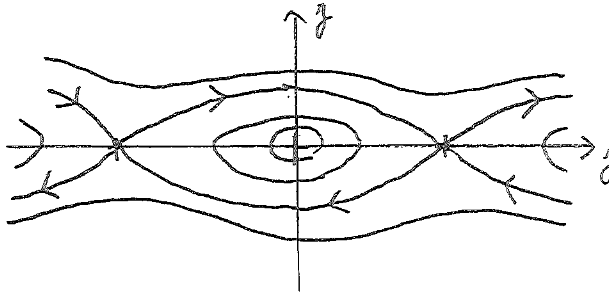


$f\ \mathcal{C}^1$ (C.L.)

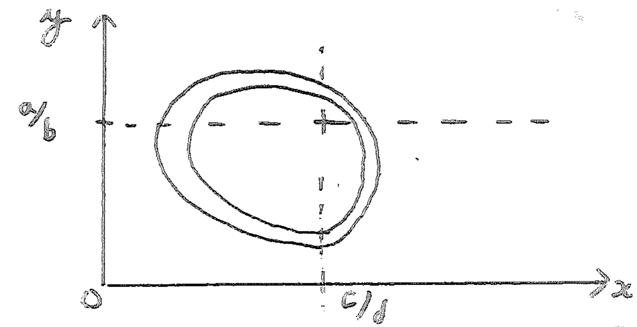


$f\ \mathcal{C}^0$

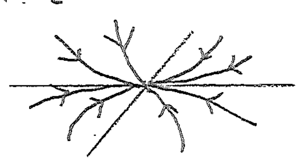
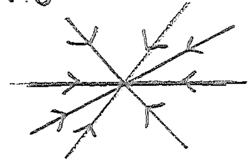
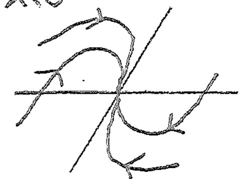
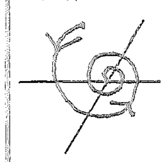
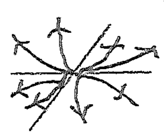
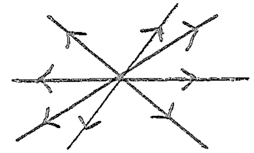
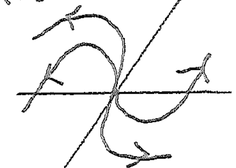
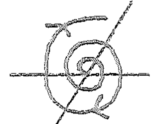
(3) Pendule simple



(4) Proie - prédateur



(5) Stabilité : $A \in M_2(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_i \neq 0$

	$A \sim \begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$A \sim \begin{bmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{bmatrix}$	$A \sim \begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{bmatrix}$	$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$
asymptotiquement stable	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ 	$\lambda < 0$ 	$\lambda < 0$ 	$Re(\lambda_1) < 0$ 
instable	$0 < \lambda_1 < \lambda_2$  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 	$\lambda > 0$ 	$\lambda > 0$ 	$Re(\lambda_1) > 0$ 
seulement stable				$Re(\lambda_1) = 0$