Soit (E,d) un espace métrique. Le symbole $\sqcup$ désigne l'union disjointe.

I – Notion(s) de connexité

A – Des espaces d'un seul tenant

[G] 39–40

Thm 1 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe O_1 et O_2 deux ouverts de E tels que $E = O_1 \sqcup O_2$.
2. Il existe F_1 et F_2 deux fermés de E tels que $E = F_1 \sqcup F_2$.
3. Les seules parties de E ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E.
4. Toute application continue de E dans $\mathbb{Z}$ est constante.

Def 2 : On dit que E est connexe si E vérifie l'une des 4 assertions de Thm 1.

Ex 3 : ▸ Un singleton est connexe ▸ $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe

Prop 4 : Soit $A \subseteq E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est connexe
2. Pour tous ouverts O_1 et O_2 de E tels que $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, on a l'alternative :
$(A \cap O_1 = \emptyset$ et $A \subseteq O_2)$ ou $(A \cap O_2 = \emptyset$ et $A \subseteq O_1)$
3. Pour tous fermés F_1 et F_2 de E tels que $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$, on a l'alternative :
$(A \cap F_1 = \emptyset$ et $A \subseteq F_2)$ ou $(A \cap F_2 = \emptyset$ et $A \subseteq F_1)$

Prop 5 : L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Prop 6 : Soit $A \subseteq E$ connexe. Si $B \subseteq E$ vérifie $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, alors B est connexe.

Prop 7 : Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I$, $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Prop 8 : Un produit fini d'espaces est connexe si, et seulement si ses facteurs sont connexes.

Thm 9 : Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles [G] 41

Cor 10 (théorème des valeurs intermédiaires) : L'image d'un intervalle par une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un intervalle. [G] 41

Cor 11 (théorème de DARBOUX) : Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. [G] 47
Alors $f'(I)$ est un intervalle.

B – Connexité par arcs

Def 12 : Un chemin de E est une application continue $\gamma : [a,b] \to E$. L'image $\gamma([a,b])$ est appelée arc de E, et on dit que γ relie $\gamma(a)$ (son origine) à $\gamma(b)$ (son extrémité). [G] 40

Def 13 : On dit que E est connexe par arcs si pour toute paire de points de E, il existe un chemin de E les reliant. [G] 40

Thm 14 : Tout connexe par arcs est connexe. [G] 40

Rq 15 : La réciproque est fausse : $\{(x, x^2 \sin(\frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^*\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Prop 16 : Dans un espace vectoriel normé :

convexe $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe

Ex 17 : Une boule et une sphère sont connexes par arcs.

204 — Connexité. Exemples et applications.

C- Composantes connexes

[G] 41 **Thm 18** : La relation "$x \sim y \Leftrightarrow \exists C \subseteq E$ connexe telle que $(x,y) \in C^2$" est une relation d'équivalence sur E.

[G] 41 **Def 19** : Les classes d'équivalence de la relation de Thm 18 sont appelées composantes connexes de E.

[G] 41 **Prop 20** : Soit $x \in E$. La composante connexe $C(x)$ de E contenant x est la réunion des connexes de E contenant x. C'est donc le plus grand connexe de E contenant x.

[G] 41 **Prop 21** : Une composante connexe est fermée. Si E admet un nombre fini de composantes connexes, alors ces-dernières sont ouvertes.

II - Utilisation de la connexité en analyse

A - En calcul différentiel

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable.

Prop 22 : Si U est connexe, alors f constante $\Leftrightarrow \forall x \in U, df(x) = 0$

[G] 349 **Appli 23** : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 dont la différentielle en tout point est une isométrie. Alors f est une isométrie affine. DEV 1

Rq 24 : La connexité est cruciale : $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$ sur $\mathbb{R}^*$.

B - En analyse complexe

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Def 25 : On appelle lacet de Ω un chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Def 26 : Soit γ un lacet de Ω, notons Γ l'arc associé. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. On appelle indice de z par rapport à γ la quantité : [T] 71

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}$$

Thm 27 (de l'indice) : Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et nulle sur la composante non bornée. [T] 71

Thm 28 (de JORDAN) : Soit γ un lacet simple, i.e. qui ne s'auto-intersecte pas. Soit Γ l'arc associé à γ. Alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non. DEV 2 (cas C^1) [GT] 95

Thm 29 (principe des zéros isolés) : Supposons Ω connexe. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytique non constante. Alors f s'annule un nombre fini de fois sur tout compact. [T] 53

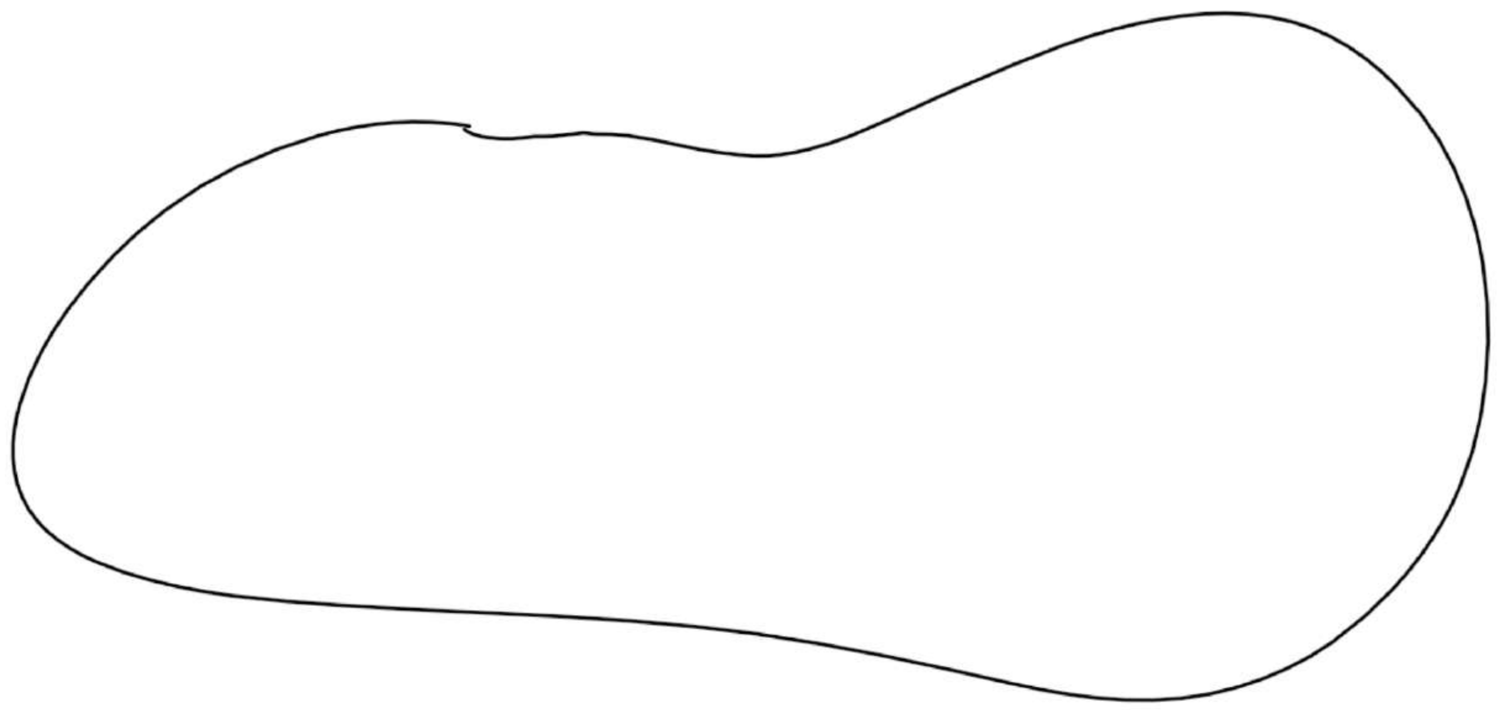
Cor 30 (principe de prolongement analytique) : Soient f et g holomorphes sur Ω. Si $f = g$ sur une partie de Ω qui possède un point d'accumulation, alors $f = g$ sur Ω.

Appli 31 : La fonction caractéristique de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est $t \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$.

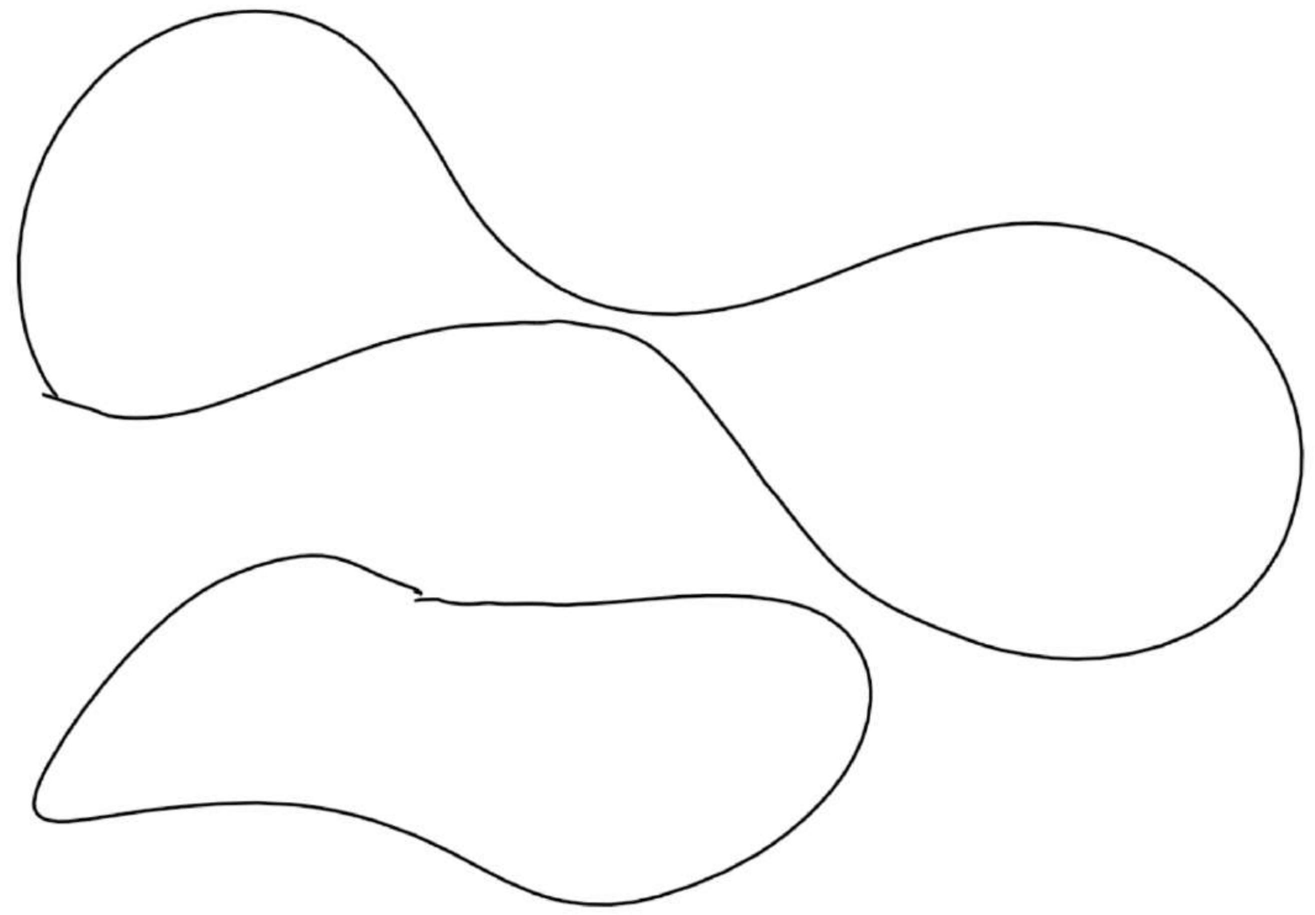
Thm 32 (principe du maximum global) : Supposons Ω connexe borné. Soit f continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. Alors : [T] 86

$$\sup_\Omega |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

Figure



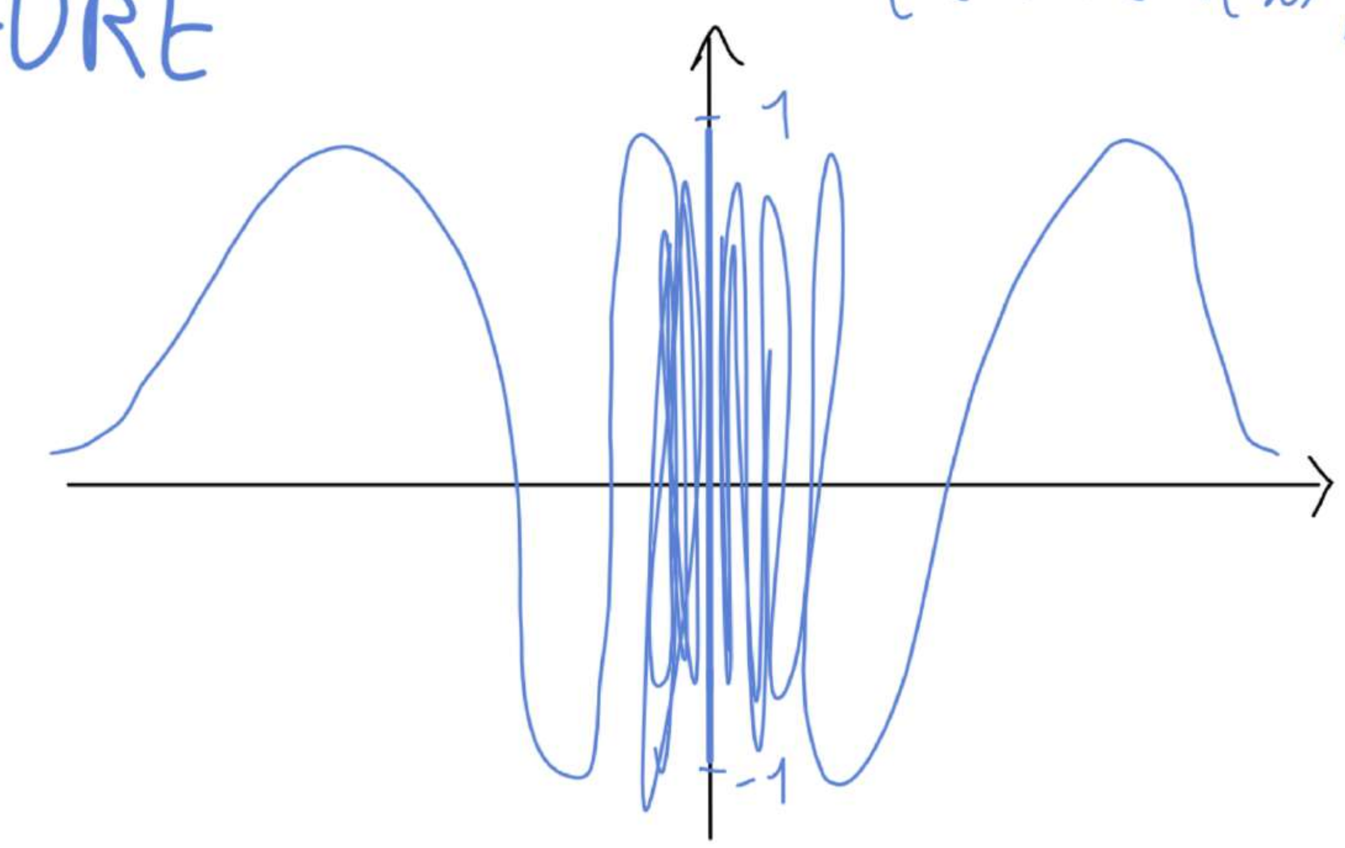
Un ensemble connexe



Un ensemble avec deux composantes connexes

Figure

$\{(x, x^2 \sin(\frac{1}{x})) : x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{0\} \times [-1,1]$



Références

[Go]
[T]
[GT]