201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

I - Espaces de fonctions continues

Dans cette section, (X,d) est un espace métrique compact. Lorsque X est un segment de $\mathbb{R}$, on note $X=[a,b]$. Le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions scalaires continues sur X.

[G] 31 **Thm 1** (de HEINE) : Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

A - Approximation uniforme sur un compact

[HL] 24 **Thm 2** : $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty : f \longmapsto \max_{x\in X} |f(x)|$.

[G] 232 **Def 3** : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$, soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Abréviation : CVU = "converge uniformément".

[G] 233 **Lemme 4** : Une limite uniforme d'une suite d'applications continues est continue.

[G] 238 **Thm 5** (de DINI) : 1▸ Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si $(f_n)_n$ est croissante et converge simplement vers $f\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ CVU vers f.
2▸ Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est croissante. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ CVU vers f.

[HL] 26 **Ex 6** : Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ définie par $f_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1} = f_n + \frac{1}{2}\left(id_{\mathbb{R}}^2 - f_n^2\right)$. La suite $(f_n)_n$ CVU vers $x\longmapsto |x|$

[G] 304 **Def 7** : Soit $(\alpha_n)_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que $(\alpha_n)_n$ est une approximation de l'unité si pour tout $n\in\mathbb{N}$,
1▸ $\alpha_n \geq 0$ 2▸ $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n = 1$ 3▸ $\forall \delta>0$, $\int_{|t|\geq\delta} \alpha_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Prop 8 : Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nulle en dehors d'un compact K, soit $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité. La suite des $f*\alpha_n : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\alpha_n(t)$ converge uniformément vers f sur K. [G] 304

Thm 9 (de WEIERSTRASS polynomial) : Toute fonction scalaire continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. [G] 304

Ex 10 : Si $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$, alors $f=0$. [G] 306

Prop 11 : La suite $\left(K_N : t \longrightarrow \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2\right)_{N\geq 1}$ est une approximation de l'unité 2π-périodique. [G] 306

Thm 12 (de WEIERSTRASS trigonométrique) : Toute fonction scalaire continue 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques, i.e. de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\cdot) + b_k \sin(k\cdot)$.

Rq 13 [admis] : Ces deux théorèmes de WEIERSTRAS ssont équivalents.

Thm 14 (de STONE-WEIERSTRASS) : Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ séparante (i.e. telle que $\forall (x,y)\in X^2$, $x\neq y \Rightarrow \exists f \cdot f(x)\neq f(y)$), unitaire et stable par conjugaison est dense dans $(\mathcal{C}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$. DEV 1 [HL] 26-30

B - Espace des fonctions lipschitziennes

Prop 15 : Notons $E = Lip([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f\in E$, on définit $K(f) = \inf\{k\geq 0 \mid \forall (x,y)\in[0,1], |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|\}$ et $N(f) = |f(0)| + K(f)$. Alors E est complet pour N, mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$. [FGN] 131

C - Équicontinuité : parties compactes de $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$

Dans ce paragraphe, Y à la fois muni d'une métrique δ et d'une mesure μ.

[HL] 37 **Def 16** : Soit $A \in \mathcal{C}(X,Y)$. On dit que A est :

- équicontinue en $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 : \forall f \in A, \forall x \in X,\ d(x_0,x)<\eta \Rightarrow \delta(f(x),f(x_0))<\varepsilon$
- uniformément équicontinue si $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 : \forall f \in A, \forall (x,y) \in X^2, d(x,y)<\eta \Rightarrow \delta(f(x),f(y))<\varepsilon$

[HL] 38 **Ex 17** : Toute famille finie de $\mathcal{C}(X,Y)$ est uniformément équicontinue, de même que les familles de fonctions k-lipschitziennes, pour tout $k>0$ fixé.

[HL] 38 **Prop 18** : Comme X est compact, toute famille de $\mathcal{C}(X,Y)$ est équicontinue (en tout point de X) si, et seulement si elle est uniformément équicontinue.

[HL] 39 **Thm 19** (d'Ascoli-Arzelà) : Les compacts de $\mathcal{C}(X,Y)$ sont ses parties fermées, bornées et équicontinues.

[HL] 39 **Ex 20** : Supposons Y compact et μ positive et finie. Pour $K \in \mathcal{C}(X \times Y, \mathbb{K})$, on pose $T_K : \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$, $f \longmapsto \int_Y K(\cdot,y) f(y)\, d\mu(y)$. Alors $\overline{T(B_{\mathcal{C}(Y)}(0,1))}$ est compact.

[ZQ] 359 **Thm 21** (de Cauchy-Péano-Arzelà) [admis] : Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$, et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet (au moins) une solution maximale.

II - Espaces de Lebesgue

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, avec μ positive.

A - L'espace vectoriel normé $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$

[BP] 157 158 175 **Def 22** : Pour $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on pose :

- Pour $p \in [1,+\infty[$, $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|f\|_\infty = \inf\{C>0 \mid \mu(\{x \in \Omega \mid |f(x)|>C\})=0\}$

Et on définit pour $p \in [1,+\infty]$: $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}$

Def 23 : Soient $f,g : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables. On dit que $f=g$ μ-presque partout (abrégé μ-pp) si $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$. [BP] 165

Prop 24 : $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, et $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-pp. [BP] 165 176

Def 25 : La relation $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-pp. est une relation d'équivalence entre fonctions mesurables. On définit $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) = \mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)/\sim$. On confondra les classes de $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ avec les représentants de ces classes. [BP] 165

Lorsque μ est la mesure de comptage, et $\Omega = \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$), on note $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$. [BP] 157

Thm 26 (inégalité de Hölder) : Soit $(p,q) \in [1,+\infty]$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. [BP] 159 177

$$\forall f \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu),\ \forall g \in L^q(\Omega,\mathcal{A},\mu),\quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Thm 27 (de Riesz-Fisher) $(L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet pour $p \in [1,+\infty]$. [BP] 166 176

Prop 28 : Si $\mu(X)$ est finie, alors $\forall\, 1 \leq p < q \leq +\infty$, $L^q(X,\mathcal{A},\mu) \subsetneq L^p(X,\mathcal{A},\mu)$.
Si μ est une mesure de probabilités, alors $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$.

B - Convolution, densités

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \lim_{\pm\infty} f = 0\}$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'un compact, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$.

Thm 29 : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda), \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < +\infty$. [BP] 171

Prop 30 : Soient $1 < p,q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Pour toutes $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $f*g(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f*g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. [BP] 297

Prop 31 : Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f*g(x)$ est bien définie, et $f*g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. [BP] 297

[BP] 300 Prop 32 : Soient $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $g\in L^1(\mathbb{R})$. La convolée $f*g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$, et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$ (inégalité de YOUNG).

[BP] 308 Thm 33 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ pour $1\leq p<+\infty$.

Prop 34 : $\mathcal{C}^1([a,b])$ est dense dans $(L^1([a,b]), \|\cdot\|_1)$.

[ZQ] 73 Ex 35 : (Lemme de RIEMANN-LEBESGUE) : $\forall f\in L^1([a,b])$, $\int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0$.

C- L'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – séries de Fourier

[BP] 180 Prop 36 : $(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire (hermitien) sous-jacent étant $\langle\cdot,\cdot\rangle : (f,g) \longmapsto \int_\Omega f\bar{g}\,d\mu$.

Notons $L^p_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f\in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \frac{\lambda}{2\pi})$ qui sont 2π-périodiques. On a alors $\|f\|_p = \int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,\frac{dt}{2\pi}$ et $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\frac{dt}{2\pi}$.

On pose, pour $n\in\mathbb{Z}$, $e_n : t\longmapsto e^{int}$ et $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\frac{dt}{2\pi}$.

Thm 37 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Prop 38 : $\mathcal{F} : L^2_{2\pi} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $f\longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie.

D- Transformation de FOURIER dans $L^1(\mathbb{R})$

[BP] 316 Def 39 : La transformation de FOURIER est l'opérateur :

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \left[\xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{ix\xi}\,dx\right] \end{array}$$

[BP] 322 Thm 40 : $\mathcal{F}$ est un morphisme entre l'algèbre de Banach convolutive $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ et l'algèbre de Banach multiplicative $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), +, \times)$.

Thm 41 (formule d'inversion) : Pour tout $f\in L^1(\mathbb{R})$ si $\mathcal{F}[f]\in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}[f](\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi$. [F] 133

Ex 42 : Calcul de $\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ par inversion de $\mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-a,a]}]$. [F] ~130

Ex 43 : Soit $c>0$. On a $f : x\longmapsto e^{-c|x|}\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f} : \xi\longmapsto\frac{2c}{c^2+\xi^2}\in L^1(\mathbb{R})$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\hat{\hat{f}}(x) = \pi e^{-c|x|}$.

Thm 44 (de PLANCHEREL) : Si $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}\in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|\hat{f}\|_2$.
En particulier, $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})]\subset L^2(\mathbb{R})$, et cette partie est dense.
Thm 45 : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme (toujours noté $\mathcal{F}$) de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, appelé transformation de FOURIER-PLANCHEREL.

DEV 2

RÉFÉRENCES

[G] : Les maths en tête – Analyse (Xavier Gourdon) [3e édition]
[HL] : Éléments d'analyse fonctionnelle (Francis Hirsch, Gilles Lacombe)
[BP] : Théorie de l'intégration (Marc Briane, Gilles Pagès) [7e édition]
[ZQ] : Analyse pour l'agrégation (Claude Zuily, Hervé Queffélec) [4e édition]
[F] : Calcul intégral (Jacques Faraut)
[FGN] : Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS Analyse 3 (Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas)