Utilisation de la notion de compacité

203

Dans toute la leçon, (X,d) et (Y,δ) sont des espaces métriques.

I - Notion de compacité : définition, caractérisation, propriétés

[G] 27 **Def 1** : On dit que (X,d) est compact si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini de X.

[G] 27 **Ex 2** :
- Si X est fini, alors (X,d) est compact.
- $(\mathbb{R},|\cdot|)$ n'est pas compact : $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n,n[$.

[G] 27 **Prop 3** : Un espace métrique compact est borné.

[G] 28 **Prop 4** : Si (X,d) est compact, alors toute intersection décroissante de fermés non vides de X est non vide.

[G] 28 **Rq 5** : La compacité est cruciale : considérer $X=\mathbb{R}$, et $([n,+\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$.

[G] 28 **Thm 6** (de Bolzano-Weierstrass) : (X,d) est compact si, et seulement si de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite convergente.

Ex 7 : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\leq b$, $[a,b]$ est compact.

[G] 30 **Cor 8** : Tout espace métrique compact est complet.

[G] 30 **Cor 9** : Toute partie fermée d'un compact est compacte.

[G] 30 **Ex 10** : Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

[G] 30 **Prop 11** : Tout compact est fermé et borné.

Rq 12 : La réciproque est fausse : la boule unité fermée de $(\mathbb{R}[X],\|\cdot\|_\infty)$ est fermée et bornée, mais pas compacte.

Thm 13 : Les compacts de $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés. [G] 30

Thm 14 (de Tychonov) : Un produit fini de compacts est compact. [G] 30

Prop 15 : Dans un espace compact, une suite converge si, et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. [G] 30

Rq 16 : La compacité est cruciale : considérer $(n\delta_{n\in 2\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans toute la suite, on supposera (X,d) compact.

II - Fonctions continues sur un compact

A - Cas des fonctions numériques

Thm 17 : L'image d'un compact par une application continue est compacte. [G] 31

Ex 18 : La compacité est cruciale : $\mathbb{R}=\arctan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$

Prop 19 : La réciproque d'une bijection continue sur un compact est continue (on a donc un homéomorphisme). [G] 31

Thm 20 (des bornes atteintes) : Toute fonction de $C(X,\mathbb{R})$ est bornée et atteint ses bornes. [G] 31

Ex 21 : Existence d'une trajectoire fermée à 3 rebonds sur un billard elliptique. [Rv] 413

Ex 22 : Soit $F\subseteq X$ non vide fermée. Pour tout $x\in X$, il existe $y\in F$ tel que $d(x,y)=d(x,F)=\inf_{z\in F} d(x,z)$. [G] ~33

Dans la suite de ce paragraphe, $(X,d)=([a,b],|\cdot|)$, et on fixe $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$.

[G] 73 <u>Thm 23</u> (de Rolle) : Si f est dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $f(a)=f(b)$, alors
[Ro] 251 il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

[Ro] 253 <u>Ex 24</u> : Si f est n fois dérivable sur $]a,b[$ et s'annule $n+1$ fois, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

[G] 74 <u>Thm 25</u> (des accroissements finis) : Si f est dérivable sur $]a,b[$, alors il
[Ro] 258 existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

[G] 74 <u>Ex 26</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ continue sur I et dérivable
[Ro] 261 sur $\mathring{I}$. Alors f est croissante sur I si, et seulement si $f'\geq 0$ sur $\mathring{I}$.

[Ro] 238 <u>Ex 27</u> : Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle non ponctuel, soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fois dérivable.
[G] 96 Si $f''\geq 0$, alors f est convexe.

B- Uniforme continuité, approximation uniforme

[G] 31 <u>Thm 28</u> (de Heine) : Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

[G] 238 <u>Thm 29</u> (de Dini) : 1▸ Soit $(f_n)_n\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si $(f_n)_n$ est croissante et converge simplement vers $f\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ CVU vers f.

2▸ Soit $(f_n)_n\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est croissante. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ CVU vers f.

<u>Ex 30</u> : Soit $(P_n)_n$ définie par $\forall x\in[-1,1]$, $P_0(x)=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1}(x)=$ [HL] 26
$P_n(x)+\frac{1}{2}\left(x^2-P_n^2(x)\right)$. La suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1,1]$.

<u>Thm 31</u> (de Stone - Weierstrass) : Toute sous-algèbre H de $C(X,\mathbb{R})$ unitaire [HL] 26
et séparante (i.e. $\forall(x,y)\in X^2$, $x\neq y\Rightarrow\exists h\in H: h(x)\neq h(y)$) est dense pour $\|\cdot\|_\infty$.

<u>Cor 32</u> (Théorème de Weierstrass) : toute fonction continue sur DEV1 [G] 304
un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

C- Équicontinuité

<u>Def 33</u> : Soit $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}(X,Y)$. On dit que $\mathcal{A}$ est : [HL] 37

- équicontinue en $x_0\in X$ si $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0:\forall f\in\mathcal{A},\forall x\in X,\ d(x_0,x)<\eta\Rightarrow\delta(f(x),f(x_0))<\varepsilon$
- uniformément équicontinue si $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0:\forall f\in\mathcal{A},\forall(x,y)\in X^2,\ d(x,y)<\eta\Rightarrow\delta(f(x),f(y))<\varepsilon$

<u>Prop 34</u> : (X,d) étant compact, $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue si, et seule- [HL] 38
ment si elle est équicontinue en tout point de X.

<u>Ex 35</u> : Toute famille finie de $\mathcal{C}(X,Y)$ est uniformément équicontinue, de même que [HL] 38
les familles de fonctions k-lipschitziennes, pour tout $k>0$ fixé.

<u>Thm 36</u> (d'Ascoli-Arzelà) : Les parties compactes de $C(X,Y)$ sont les fermés [HL] 39
bornés équicontinus.

<u>Ex 37</u> : Munissons Y d'une mesure μ finie, et supposons Y compact. Pour [HL] 39
$K\in C(X\times Y,\mathbb{R})$, on définit $T_K: C(Y,\mathbb{R})\longrightarrow C(X,\mathbb{R})$, $f\longmapsto\int_Y K(\cdot,y)f(y)\,d\mu(y)$.
Alors $\overline{T_K\left(B_{C(Y)}(0,1)\right)}$ est compact.

III - Compacité dans les espaces vectoriels normés

On fixe $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces de Banach.

A - Parties compactes et dimension finie

Thm 38 : Si E est de dimension finie, alors ses compacts sont les fermés bornés.

[G] 50 Thm 39 : Si E est de dimension finie, alors toutes ses normes sont équivalentes. DEV 2

[G] 56 Thm 40 (de RIESZ) : E est de dimension finie si, et seulement si sa boule unité fermée (pour une norme quelconque) est compacte.

[G] 33 Ex 41 : Supposons E de dimension finie. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$, alors f est minorée et atteint son minimum.

B - Opérateurs compacts

[HL] 186 Def 42 : On dit que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $\overline{T(\overline{B_E(0,1)})}$ est compact.

[HL] 186 Ex 43 : Les opérateurs à noyau, i.e. de la forme donnée dans Ex 37, sont des opérateurs compacts.

[HL] 186 Prop 44 :
- Les opérateurs de rang fini sont compacts.
- id_E est compact si, et seulement si E est de dimension finie.

[HL] 186 Notation 45 : On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F, et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.

Prop 46 : $\mathcal{K}(E)$ est un idéal. [HL] 187

Prop 47 : $\mathcal{K}(E,F)$ est un fermé de $(\mathcal{L}(E,F), |||\cdot|||)$. [HL] 187

Cor 48 : Une limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est compacte. [HL] 188

RÉFÉRENCES

[G] : Les maths en tête - Analyse (Xavier Gourdon) [3e édition]

[HL] : Éléments d'analyse fonctionnelle (Francis Hirsch, Gilles Lacombe)

[Ro] : Éléments d'analyse réelle (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition]

[Rv] : Petit guide du calcul différentiel (François Rouvière) [4e édition]