171

Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

On suppose connue la théorie générale des espaces quadratiques, pour se concentrer sur le cas particulier d'un espace quadratique réel (E,q) de dimension $n \geq 1$. On note φ la forme polaire de q.

I - Propriétés propres aux formes quadratiques réelles

A - Positivité et définition

[Rb] 475 **Def 1** : On dit que q est positive (resp. négative) si $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$). Si cette inégalité est stricte, alors on dit que q est définie positive (resp. définie négative).

Ex 2 : Sur $\mathbb{R}^2$, $q : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ est définie positive, $q : (x,y) \mapsto x^2$ est positive non définie, et $q : (x,y) \mapsto xy$ est rien du tout.

[Rb] 475 **Thm 3** (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ) : Si q est positive, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$, avec égalité si (et seulement si lorsque q est définie positive) x et y sont colinéaires.

Cor 4 :
- Si q est positive, alors $\sqrt{q}$ est une semi-norme.
- Si q est définie positive, alors $\sqrt{q}$ est une norme.

Cor 5 : Si q est positive, alors q définie positive $\Leftrightarrow$ q non dégénérée

B - Réduction et algorithme de GAUSS

[Rb] 463 **Thm 6** (de réduction de GAUSS) : Il existe $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ une famille libre de formes linéaires et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ telles que $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i^2$.

[Rb] 469-472 **Algo 7** : Écrivons $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j} x_i x_j$.

- S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$ (quitte à renuméroter, disons $a_1 \neq 0$)

On écrit $q(x_1, \dots, x_n) = a_1 \left(x_1 + \frac{1}{a_1} \sum_{2 \leq j \leq n} b_{1,j} x_j\right)^2 + [\text{ce qui manque} = f(x_2, \dots, x_n)]$.

- Sinon, quitte à renuméroter, supposons que $b_{1,2} \neq 0$. Alors :

$$q(x_1, \dots, x_n) = 2 b_{1,2} x_1 x_2 + 2x_1 \underbrace{\sum_{3 \leq j \leq n} b_{1,j} x_j}_{f_1(x_3, \dots, x_n)} + 2x_2 \underbrace{\sum_{3 \leq j \leq n} b_{2,j} x_j}_{f_2(x_3, \dots, x_n)} + \cdots$$

$$= 2 b_{1,2} \underbrace{\left(x_1 + \frac{1}{b_{1,2}} f_2(x_3, \dots, x_n)\right)}_{\ell_1} \underbrace{\left(x_2 + \frac{1}{b_{1,2}} f_1(x_3, \dots, x_n)\right)}_{\ell_2} + \underbrace{\cdots}_{f_3(x_3, \dots, x_n)}$$

puis on écrit $\ell_1 \ell_2 = \frac{1}{4}\left((\ell_1+\ell_2)^2 - (\ell_1 - \ell_2)^2\right)$.

Puis on itère sur les autres variables.

Ex 8 : $5xy + 6xz + 3yz$ [Rb] ±485

$$= \frac{1}{20}(5x+5y+9z)^2 - \frac{1}{20}(5x+5y-3z)^2 - \frac{18}{5}z^2.$$

Cor 9 : Il existe une base q-orthogonale de E, i.e. dans laquelle la matrice de q est diagonale. [Rb] 473

Thm 10 (orthogonalisation simultanée) : Si q et q' sont deux formes quadratiques sur E avec q définie positive, alors il existe une base de E qui est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale. [Gr] ~315 [Au] 271

Matriciellement, si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP$ est diagonale.

C - Signature et classification

Def 11 : Notons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) l'ensemble des sous-espaces F de E tels que $q_{|F}$ est définie positive (resp. définie négative). Posons $s = \max_{F \in \mathcal{P}} \dim(F)$ et $t = \max_{F \in \mathcal{N}} \dim(F)$ avec la convention $\max \emptyset = 0$. [Rb] 477

Le couple (s,t) est appelé signature de q.

DEV 1

Thm 12 (loi d'inertie de SYLVESTER) : Supposons que $\mathcal{B}$ est q-orthogonale. Alors $s = \#\{i \in [\![1,n]\!] \mid q(e_i) > 0\}$ et $t = \#\{i \in [\![1,n]\!] \mid q(e_i) < 0\}$. [Rb] 476

[Rb] 476 Rq 13 : En particulier, $s+t = rg(q)$

Cor 14 : Les classes d'équivalence sont caractérisées par la signature. En particulier, il y a $n+1$ classes non dégénérées.

[Rb] 491 Ex 15 : La signature de $M \mapsto Tr(M^2)$ est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$

D- Matrice hessienne et optimisation

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

[BMP] 18 Thm 16 : ▸ Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a, alors a est un point critique, et $Hess_a(f)$ est négative (resp. positive).

▸ La réciproque est vraie si on suppose en plus $Hess_a(f)$ définie.

▸ Si a est un point critique et si $Hess_a(f)$ admet deux valeurs propres de signes strictement opposés, alors a est un point-selle.

Rq 17 : $x \mapsto x^4$ admet un minimum global en 0, mais sa hessienne (sa dérivée seconde) est nulle en 0.

[BMP] 24-32 Ex 18 : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle - \langle b|x\rangle$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x) = Ax - b$ et $Hess_J(x) = A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, J admet un unique minimum (global) qui est la solution de $Ax = b$.

II - Étude des coniques d'un plan affine euclidien

Soient P un plan affine euclidien. On fixe un repère orthonormé.

A- Définition algébrique, classification

[Rb] 493-494 Def 19 : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $(d,e,f) \in \mathbb{R}^3$. On pose $q : (x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ et $\ell : (x,y) \mapsto dx + ey$. Une conique est :

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in P \mid q(x,y) + \ell(x,y) + f = 0\}$$

On définit $Q : (x,y,z) \longmapsto q(x,y) + \ell(x,y)z + fz^2$.

Ex 20 : ▸ $\{(x,y) \in P \mid (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2\} = \text{Cercle}\left(\binom{\alpha}{\beta}, r\right)$. [Au] ~228-231

▸ $\{(x,y) \in P \mid \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = r^2\}$ est une ellipse.

▸ $\{(x,y) \in P \mid y = 2px^2\}$ est une parabole

Thm 21 : Classification : ANNEXE 1

Prop 22 : Soit $\Delta = b^2 - 4ac = disc(q)$ avec les notations de Def 19.

▸ Si $\Delta < 0$, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou vide,

▸ Si $\Delta = 0$, alors $\mathcal{C}$ est une parabole, deux droites parallèles ou vide,

▸ Si $\Delta > 0$, alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole, deux droites sécantes ou vide.

B - Définitions géométriques

FIGURE 2

Prop 23 : Les ellipses, paraboles, hyperboles, points et couples de droites sécantes sont obtenues comme intersection d'un cône et d'un plan. [Rb] 494

Thm 24 : Soient $\mathcal{D}$ une droite de P, $F \in P \setminus \mathcal{D}$ et $e > 0$. L'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in P \mid d(M,F) = e\,d(M,\mathcal{D})\}$ est une conique, on appelle $\mathcal{D}$ la directrice, F son foyer et e son excentricité. Plus précisément, $\mathcal{C}$ est soit vide, soit une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$. FIGURE 3 [Rb] 505-506

Rq 25 : On peut déterminer une équation dans un repère bien choisi, comme détaillé dans FIGURE 3. [Rb] 506

~~Rq 26 : La directrice est un axe de symétrie.~~

Thm 27 : ▸ Si $\mathcal{C}$ est une ellipse, alors il existe F et F' dans P [Au] 233-234 (appelés foyers de $\mathcal{C}$) et $a>0$ (appelé demi-grand axe de $\mathcal{C}$) tels que

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$$

- Si $\mathcal{C}$ est une hyperbole, alors il existe F et F' dans $\mathcal{P}$ (appelés foyers de $\mathcal{C}$) et $a>0$ (appelé demi-grand axe de $\mathcal{C}$) tels que :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}.$$

FIGURE 1

[Ei] 52

<u>Thm 28</u> : Soient A, B, C, D et E cinq points de $\mathcal{P}$ distincts.

1. Il existe une conique passant par A, B, C, D et E.
2. Elle est unique ssi 4 points ne sont pas alignés. DEV 2
3. Elle est non dégénérée ssi 3 points ne sont pas alignés.

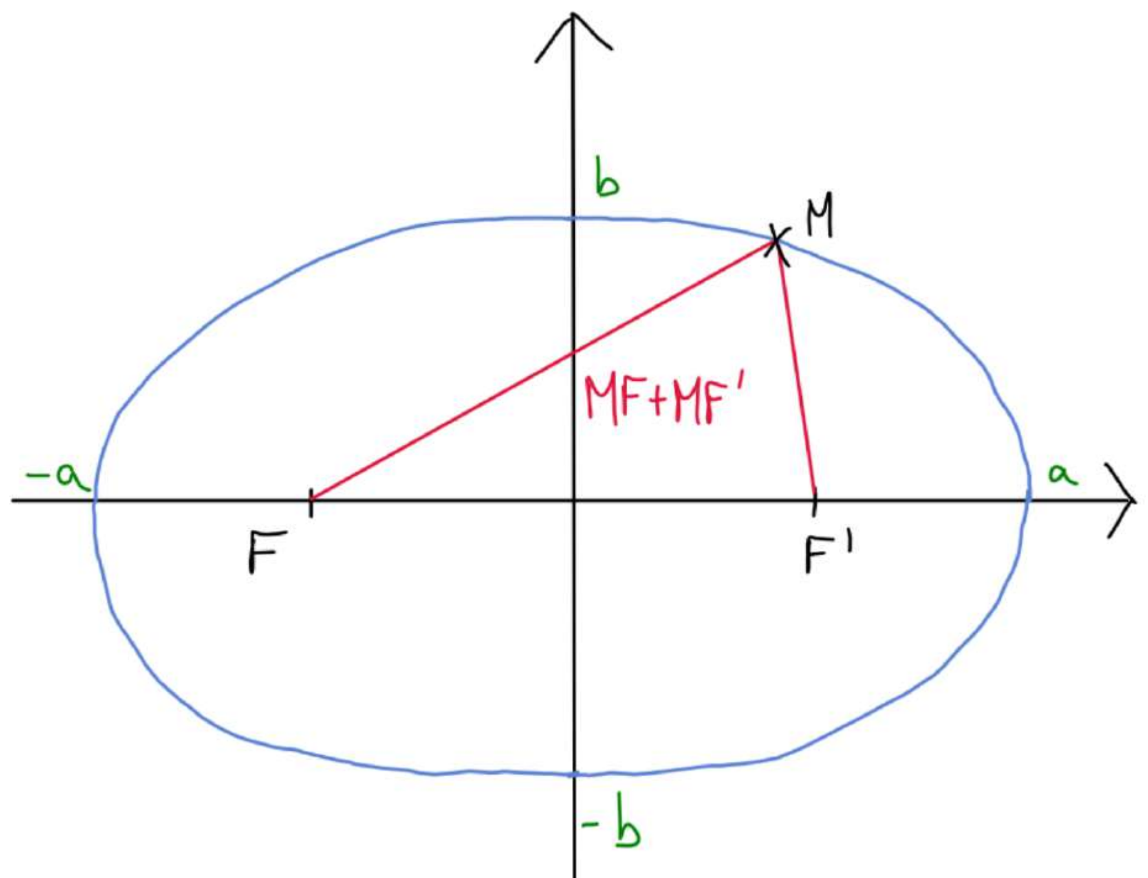
ANNEXE 1 : Classification des coniques

Type	Signature de q	Signature de Q	Éq. réduite
Ellipse	$(2,0)$ / $(0,2)$	$(2,1)$ / $(1,2)$	$x^2+y^2=1$
Parabole	$(1,0)$ / $(0,1)$	$(2,1)$ / $(1,2)$	$x^2+y=1$
Hyperbole	$(1,1)$	$(2,1)$ / $(1,2)$	$x^2-y^2=1$
	$(1,1)$	$(1,1)$	$x^2-y^2=0$
	$(1,0)$ / $(0,1)$	$(1,1)$	$x^2=1$
	$(1,0)$ / $(0,1)$	$(1,0)$ / $(0,1)$	$x^2=0$
$\{M\}$	$(2,0)$ / $(0,2)$	$(2,0)$ / $(0,2)$	$x^2+y^2=0$
$\emptyset$	$(2,0)$ / $(0,2)$	$(3,0)$ / $(0,3)$	$x^2+y^2=-1$
$\emptyset$	$(1,0)$ / $(0,1)$	$(2,0)$ / $(0,2)$	$x^2=-1$

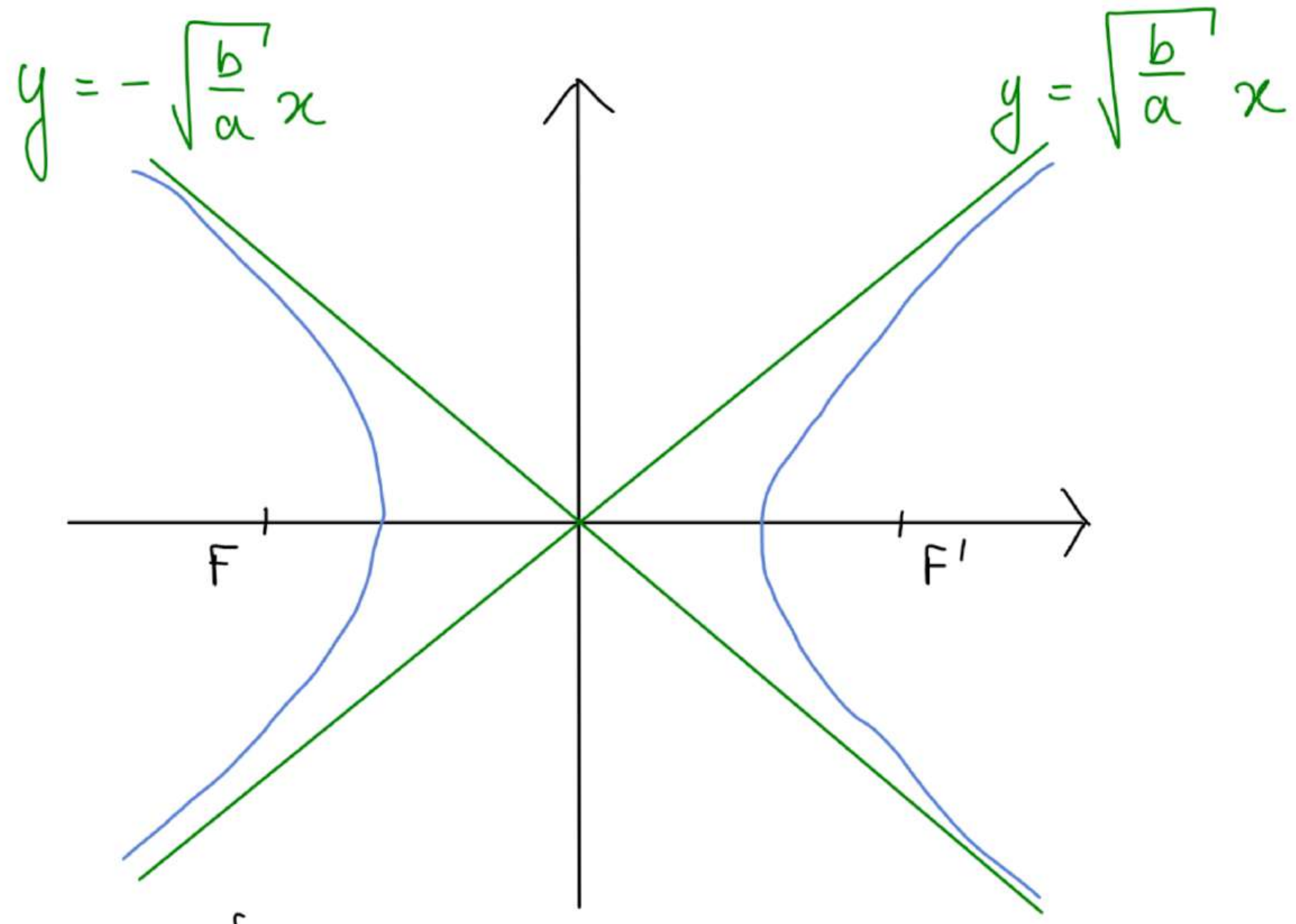
<u>RÉFÉRENCES</u>

[Rb]
[Au]
[Gr]
[Ei]
[BMP]

FIGURE 1 : Les différentes coniques

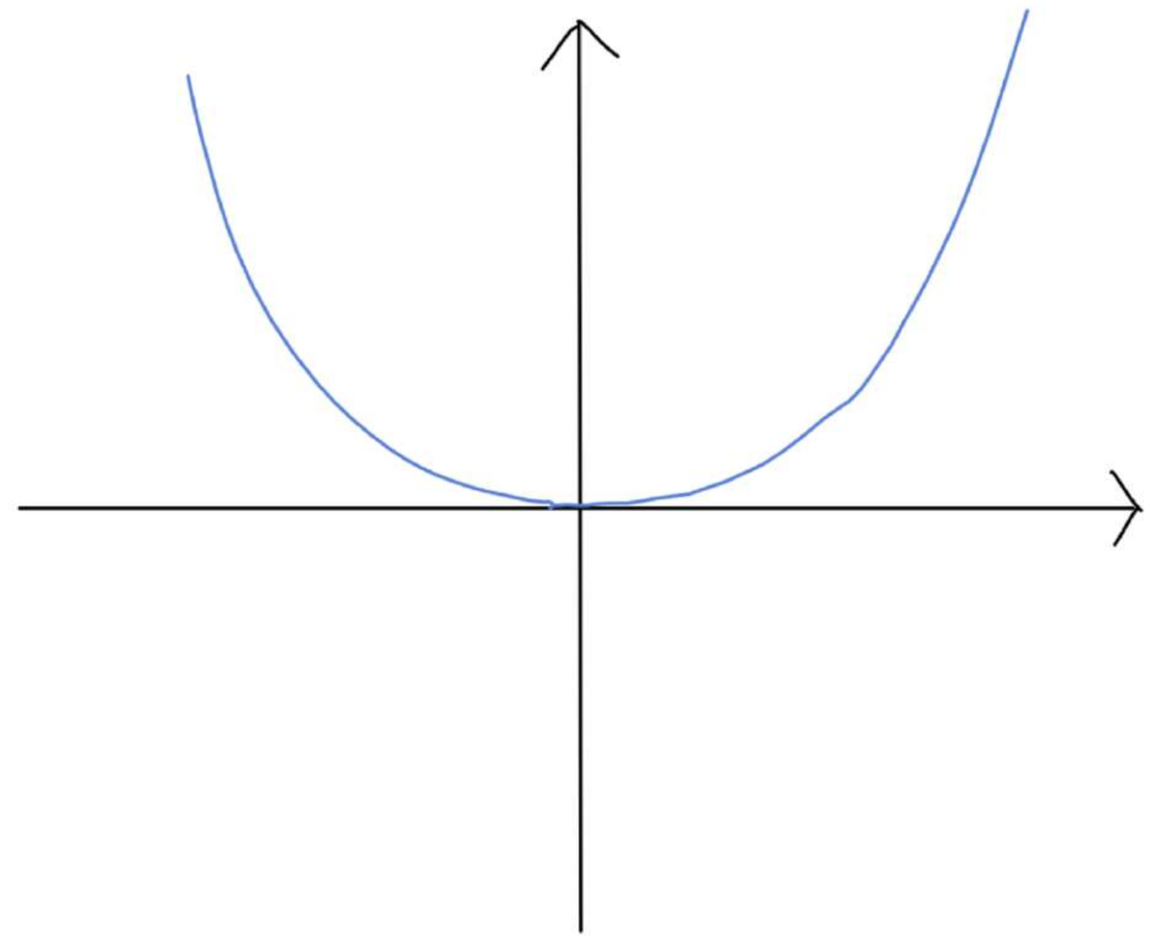


$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$$

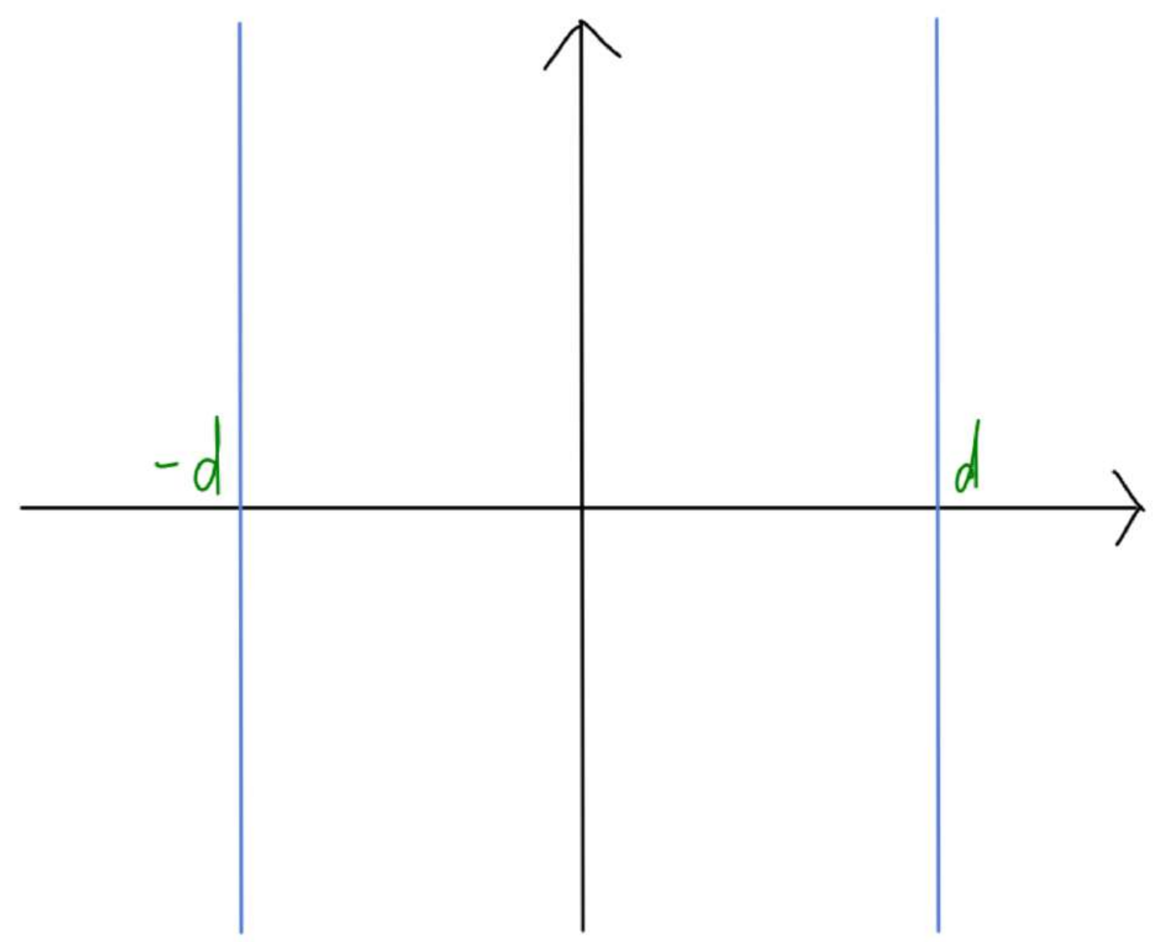


$$\mathcal{H} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$$

$$\mathcal{DS} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid y^2 = \frac{b}{a}\,x \right\}$$



$$\mathcal{B} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid y = 2px^2 \right\}$$



$$\mathcal{DP} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid x^2 = d \right\}.$$

FIGURE 2 : Sections du cône

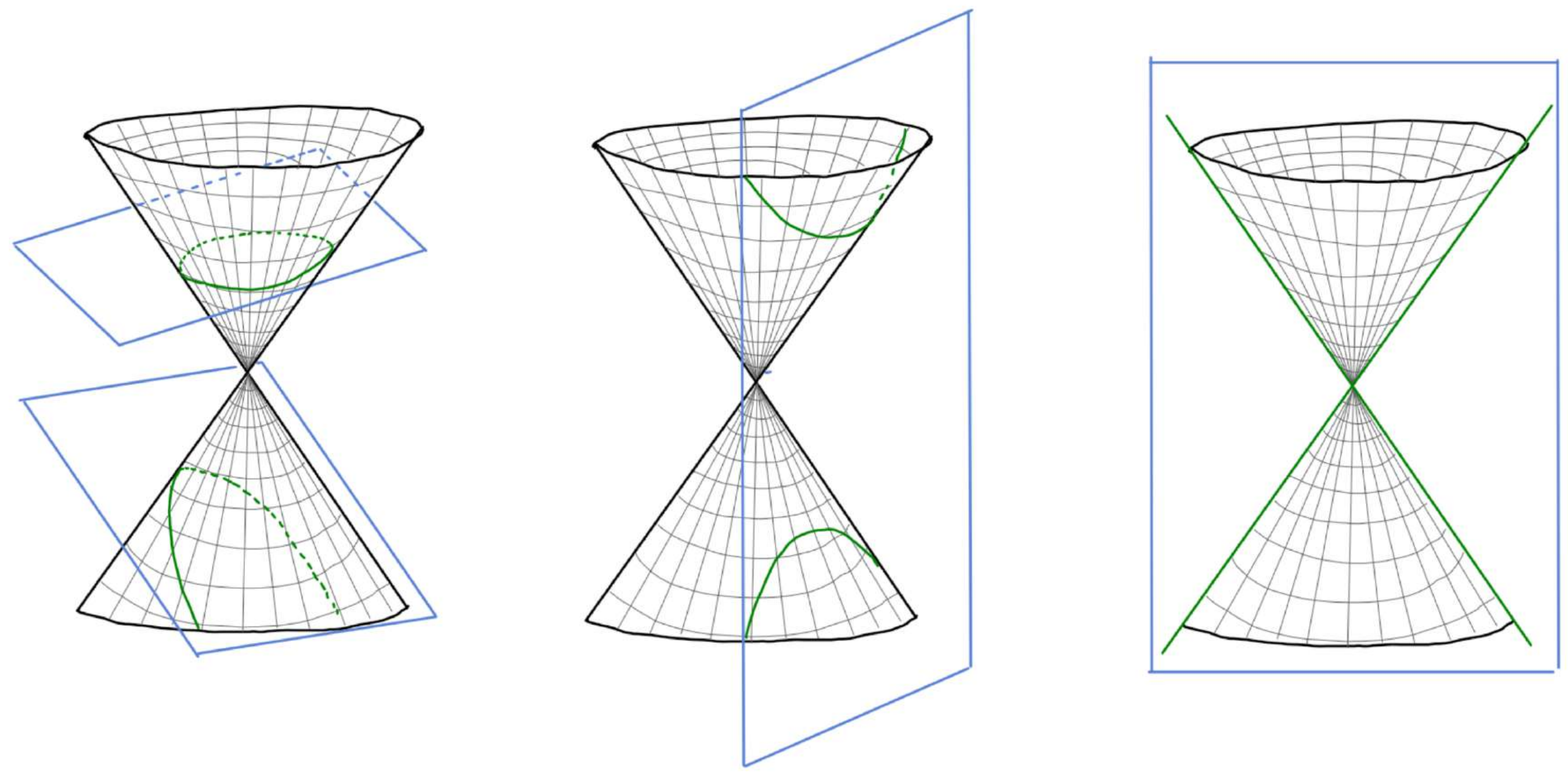
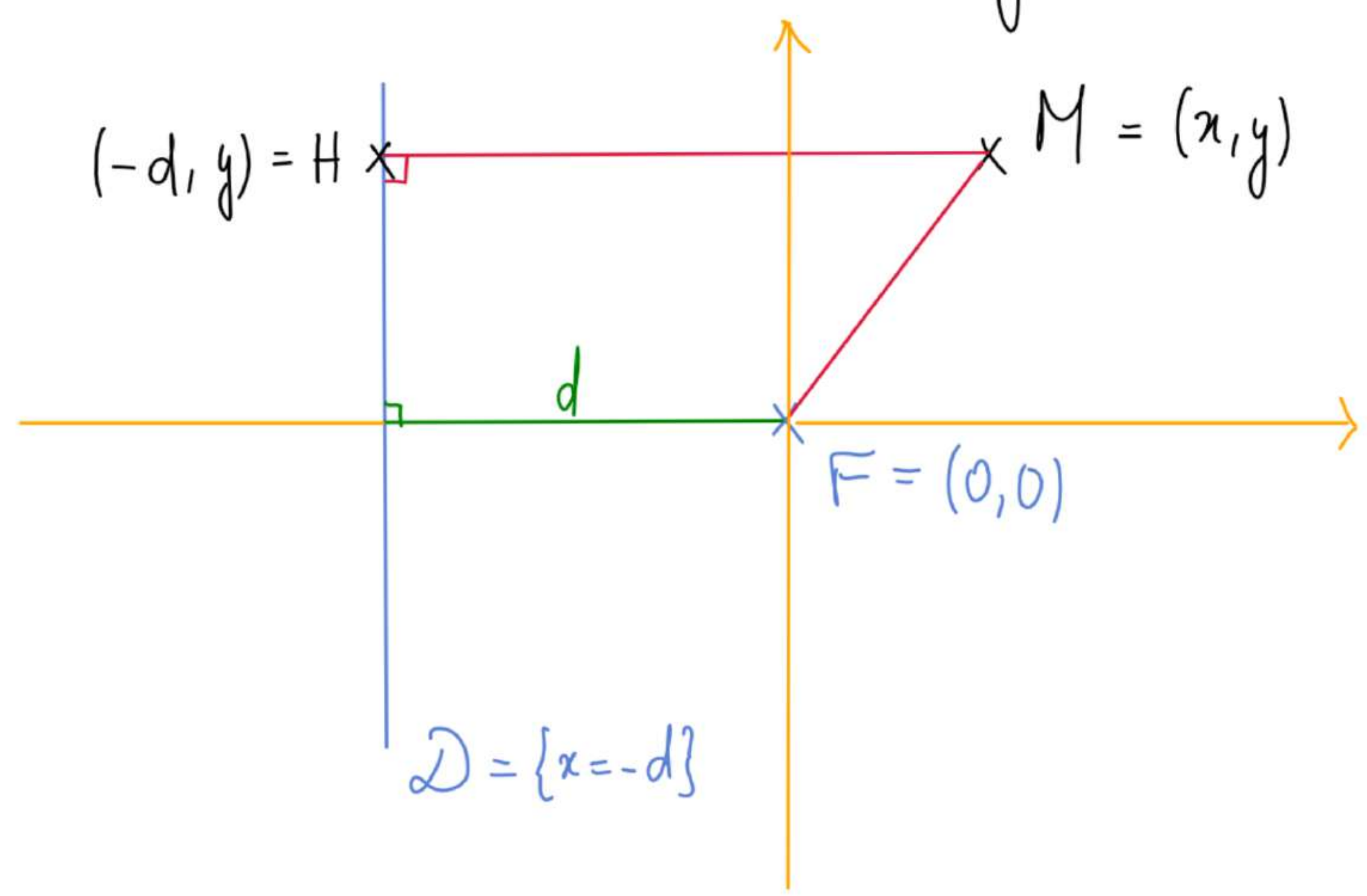


FIGURE 3 : Foyer - directrice



$$M \in \mathcal{C} \iff MF = e\,MH \iff x^2 + y^2 = e^2 (x+d)^2$$
$$\iff (1-e^2)\,x^2 + y^2 - 2e\,dx - e^2d^2 = 0$$